電気学会研究会資料（教育フロンティア研究会）
The Papers of Technical Meeting on "Frontiers in Education", IEE Japan
2021.9.16-17

FIE-21-007

# 電気回路の教科書に対する提言

藪　哲郎*（奈良教育大学）

## Proposal for Electric Circuits Textbooks

Tetsuro Yabu*  (Nara University of Education)

"Electric Circuits" is one of the most important subjects in the field of electrical engineering. It is a traditional subject and its curriculum was established when semiconductor devices were not invented. If we think of "electric circuits" as a basic knowledge for learning "electronic circuits", some descriptions should be revised.

I propose 6 topics for electric circuits textbooks. 6 topics are as follows: (1) effective value, (2) power factor, (3) equation to solve RL circuit using sinusoidal functions, (4) rigorous explanation for the symbolic method using complex number, (5) treatment of voltage source in node equation and treatment of current source in loop equation, (6) practical usage of principle of superimpose.

**キーワード**：電気回路，教科書，実効値，力率，重ね合わせ
(Electrical Circuit, Textbook, Effective Value, Power Factor, Principal of Superimpose)

## 1. はじめに

「電気回路」は RLC のみ含む回路、「電子回路」はそれに加えてダイオード、トランジスタ、オペアンプなどの半導体素子を含む回路と定義する。

電気の利用法は以下の 2 つである。

(1) エネルギー源として利用する
(2) 情報を処理・伝送する手段として利用する

電気回路の教科書は（1）が主だった時代に書かれ、あまり変化していないように思われる。「電気回路」を「電子回路」を学習するための基礎としてとらえた場合、現在の電気回路の教科書は改善すべき点があるように感じる。また、「こうすれば、より分かりやすい」と思う事項もある。

本稿では電気回路の教科書に対して、「こうした方がよい」「こうすれば、より分かりやすくなる」という提言を 6 個行う。

## 2. 実効値について

ここでの提言は「交流理論の説明は、最初は振幅で説明しよう」である。

交流理論は電源として正弦波を仮定している。線形素子のみで構成する回路の場合、以下の性質が成立することに基づいて交流理論は組み立てられている。

> 受動素子のみで構成される回路に正弦波電圧を加えると、回路中のあらゆる場所の電圧と電流は、加えた電圧と同じ周波数の正弦波になる。

正弦波の大きさを表すとき、振幅が一番分かりやすい量である。しかし、多くの電気回路の教科書において、最初に実効値の話が出てくる。そして実効値電圧を $V_e$ 振幅を $V_m$ とするとき、

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

が導出される。電圧の大きさを表す値として実効値を用いると、数式の至るところに $\sqrt{2}$ が現れ、混乱した印象を与える。

電子回路の設計において、交流信号電圧は振幅で考える。Tina や LTspice などの回路シミュレータで信号源を設定するとき、振幅を設定する。シミュレータ中の交流電圧は振幅を表示する。そこで、以下のことを提案する。

(1) 実効値を最初に扱うのをやめ、振幅を用いて交流理論を展開する。インピーダンス、複素記号法などを学習する上で、実効値は不要である。フェーザについては振幅を表すフェーザを導入する。実効値はそれらの学習が終わった後、電力を学習する箇所で導入する。フェーザに関しては「振幅を表すフェーザ」と「実効値

を表すフェーザ」を使い分ける。

(2) 実効値を学習するときは、正弦波以外の波形についても学ぶ。

振幅を表す複素数を扱う教科書は少数であるが、書籍[(1)(2)] は振幅を表す複素数を扱っている。また書籍[(1)]は (1) の提案に従って、学習内容を配列している。

「実効値」の意味は「直流換算値」である。実効値電圧の定義は以下が最も明快である。

その電圧を抵抗に加えたとき、消費電力が同じになる直流電圧の値

上記の定義は、電圧波形が正弦波以外のときにも適用できる。瞬時電圧を $v(i)$, 周期を $T$ とするとき、上記の定義を数式で書くと、以下の式になる。

$$\frac{V_e^2}{R}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{v(t)^2}{R}\,dt$$

左辺が直流電力、右辺が交流電力である。$V_e$ について解いて、次式が得られる。

$$V_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,dt} \tag{1}$$

電圧波形が正弦波でない場合は以下のようにフーリエ級数展開して考える。

$$v(t)=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t+A_2\sin 2\omega t+B_2\cos 2\omega t + A_3\sin 3\omega t+B_3\cos 3\omega t+\cdots\cdots \tag{2a}$$

$$=V_1\sin(\omega t+\theta_1)+V_2\sin(2\omega t+\theta_2) + V_3\sin(3\omega t+\theta_3)+\cdots\cdots \tag{2b}$$

電圧の実効値は次式で得られる。

$$V_e=\sqrt{\frac{A_1^2+B_1^2+A_2^2+A_2^2+A_3^2+B_3^2+\cdots\cdots}{2}} \tag{3a}$$

$$=\sqrt{\frac{V_1^2+V_2^2+V_3^2+\cdots\cdots}{2}} \tag{3b}$$

電流の場合も同様に、実効値電流を以下のように定義できる。

その電流を抵抗に流したとき、消費電力が同じになる直流電流の値

電流を $i(t)$, その実効値を $I_e$, 周期を $T$ とするとき、次式が成立する。

$$I_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt} \tag{4}$$

電流波形を以下のようにフーリエ級数展開して表す。

$$i(t)=C_1\sin\omega t+D_1\cos\omega t+C_2\sin 2\omega t+D_2\cos 2\omega t + C_3\sin 3\omega t+D_3\cos 3\omega t+\cdots\cdots \tag{5a}$$

$$=I_1\sin(\omega t+\phi_1)+I_2\sin(2\omega t+\phi_2) + I_3\sin(3\omega t+\phi_3)\cdots\cdots \tag{5b}$$

電流の実効値は次式で得られる。

$$I_e=\sqrt{\frac{C_1^2+D_1^2+C_2^2+D_2^2+C_3^2+D_3^2+\cdots\cdots}{2}} \tag{6a}$$

$$=\sqrt{\frac{I_1^2+I_2^2+I_3^2+\cdots\cdots}{2}} \tag{6b}$$

電圧・電流共に正弦波のとき「振幅を表すフェーザ」を用いた電力の計算式は以下のようになる。なお、本稿ではドットがついた文字は複素数を表す。

$$P=\frac{\mathrm{Re}\{\dot{V}\,\dot{I}^*\}}{2}=\frac{\mathrm{Re}\{\dot{V}^*\,\dot{I}\}}{2}=\frac{|\dot{V}||\dot{I}|\cos\theta}{2} \tag{7}$$

ここで $\theta$ は電流と電圧の位相差である。数式に 1/2 が含まれることに違和感を持つ人がいるかもしれない。電磁波工学や光学の分野では正弦振動をする電界や磁界を表すとき、複素振幅を用いる。これは電気回路において振幅を表すフェーザを用いることに相当する。従って、電力を表すポインティングベクトルの計算式は

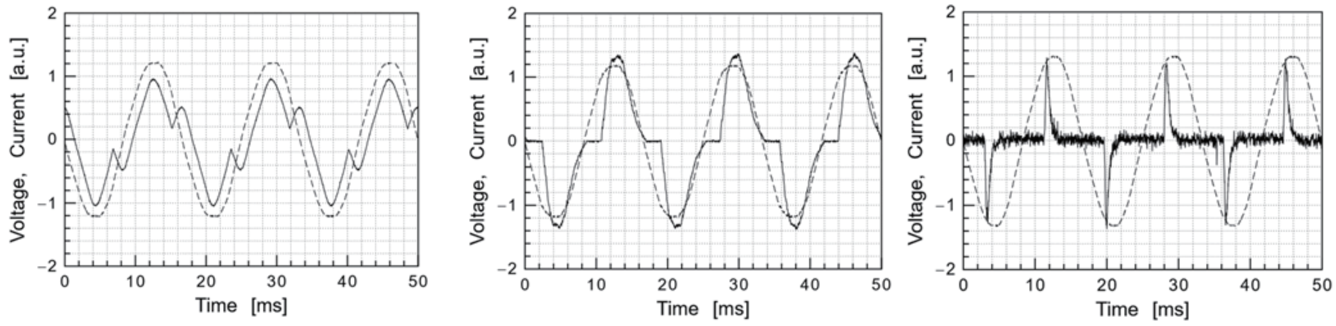
$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*}{2}$$

となり、係数 1/2 がつく。ここで $\boldsymbol{E}$ は複素電界ベクトル、$\boldsymbol{H}$ は複素磁界ベクトル、$\boldsymbol{S}$ は複素ポインティングベクトルである。このように、電力を求める式に 1/2 がつくことは特異なことではない。

## 3. 力率の定義と計算法

ここでの提案は「力率 $=\cos\theta$ と直結させるのはやめよう」である。

交流回路の電力 $P$ を求める式は、力率 $\eta$ を導入して次



(a) 電子レンジ　　(b) 掃除機（東芝 VC-PD8A）　　(c) ノート PC　AC アダプタ

図 1　電気機器の電圧・電流波形（電圧が点線、電流が実線）

式で表される[1]。

$$P = V_e I_e \eta \tag{8}$$

ここで $V_e$, $I_e$ はそれぞれ実効値電圧・実効値電流であり、$V_e I_e$ は皮相電力である。電圧と電流の波形がどちらも正弦波であり、位相差が $\theta$ であるとき、力率 $\eta$ は次式で与えられる。

$$\eta = \cos\theta$$

電源の電圧波形は通常は正弦波である。LCR だけの回路であれば、電流も正弦波である。しかし、現在の電気機器において、電流の波形が正弦波となるのは、電気ストーブやアイロン、ドライヤーなど、抵抗を負荷とする電気機器だけであり、一般的に、電気機器を流れる電流は正弦波とは言えない。

例として電子レンジ（DAEWOO　DMW-P76D）の電圧電流波形を図 1 (a)，掃除機（東芝　PC-6A）の波形を同図 (b)，ノートパソコンの AC アダプタ（Lenovo ADLX65YLC2D）の波形を同図（c）に示す。いずれも正弦波とは言えない。

交流電力を計算する本来の式は、以下である。

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i(t)\,dt \tag{9}$$

(1)(4)(8) より力率 $\eta$ は次式で与えられる。

$$\eta = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i(t)\,dt}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,dt}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt}}$$

次に電圧と電流を (2a)(2b)(5a)(5b) のようにフーリエ級数で表すときについて考える。電力は次式で与えられる。

$$P = \frac{1}{2}(A_1C_1 + B_1D_1 + A_2C_2 + B_2D_2 + \cdots\cdots) \tag{10a}$$

$$= \frac{1}{2}(V_1 I_1 \cos\alpha_1 + V_2 I_2 \cos\alpha_2 + \cdots\cdots) \tag{10b}$$

ここで、

$$\alpha_n = \theta_n - \phi_n$$

である。数式に 1/2 が付くのを避けるため、各高調波の実効値

$$V_{en} = \frac{V_n}{\sqrt{2}} \tag{11a}$$

$$I_{en} = \frac{I_n}{\sqrt{2}} \tag{11b}$$

を導入すると、(10b) は次式となる。

$$P = V_{e1} I_{e1}\cos\alpha_1 + V_{e2} I_{e2}\cos\alpha_2 + \cdots\cdots$$

電圧と電流の実効値はそれぞれ次式で与えられる。

$$V_e = \sqrt{(V_{e1})^2 + (V_{e2})^2 + (V_{e3})^2 + \cdots\cdots}$$
$$I_e = \sqrt{(I_{e1})^2 + (I_{e2})^2 + (I_{e3})^2 + \cdots\cdots}$$

力率 $\eta$ は次式で与えられる[(3)]。

$$\eta = \frac{\sum_n V_{en} I_{en} \cos\alpha_n}{V_e I_e}$$

電圧波形が正弦波であることを仮定すると、力率は次式となる。

$$\eta = \frac{I_{e1}\cos\alpha_1}{I_e}$$

[1] 力率を表す記号は定まっていないようである。電気回路では効率を表すのに $\eta$ を使う。それに倣って本稿では力率を $\eta$ で表す。

## 4. 交流回路を複素記号法を使わずに解く場合の解のおき方

ここでは「$A\sin\omega t + B\cos\omega t$ という形の解を仮定する」方法を提案する。

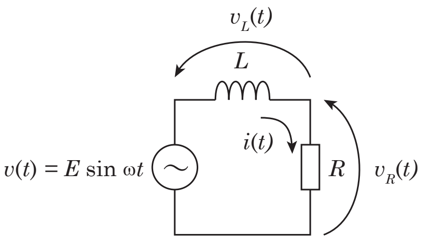



図 2　RL 回路

図 2 に示す RL 回路の電流を複素記号法を使わずに求める場合を考える。電源電圧は $v(t) = E\sin\omega t$ で与えられ、$E$ は正の実数とする。以下の微分方程式が成立する。

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E\sin\omega t \tag{12}$$

$i(t)$ を得る方法を考える。

### 4.1　振幅と位相を未知数とする方法

ほとんどの書籍では $i(t)$ を表す関数として、以下の形式を採用している。未知数は $I$ と $\theta$ の 2 つである。

$$i = I\sin(\omega t + \theta) \tag{13}$$

$$\frac{di}{dt} = I\omega\cos(\omega t + \theta) \tag{14}$$

微分方程式に代入すると、次式を得る。

$$RI\sin(\omega t + \theta) + \omega LI\cos(\omega t + \theta) = E\sin\omega t \tag{15}$$

この方程式を解く方法として以下の 2 つがある。

(a) 加法定理の逆方向に適用して左辺を $I\sin\{(\omega t + \theta) - \phi\}$ という形に変形して求める(4)。

(b) sin と cos をそれぞれ加法定理で展開する。「左辺＝右辺」として、sin の項, cos の項がそれぞれ等しいとおく。cos の項の等式より $\theta$ が求まり、その結果を利用して sin の項の等式より $I$ が求まる。

本稿では最もポピュラーと思われる (a) の方法を復習する。

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \quad \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \sin\phi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

とおいて、(15) の左辺を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\left\{\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\theta)\right. \\ & \qquad \left. + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\theta)\right\} \\ & = I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\ \{\cos\phi\ \sin(\omega t+\theta) + \sin\phi\cos(\omega t+\theta)\} \\ & = I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\ \sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} \end{aligned}$$

これが右辺の $E\sin\omega t$ と等しいので、

$$\theta = -\phi \qquad I = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

である。この方法はかなりアクロバティックな方法であり、システマティックとは言い難い。(b) の方法も同様に見通しが悪い解き方である。

### 4.2　sin の係数と cos の係数を未知数とする方法

本稿で提案する方法である。$i(t)$ を以下のように sin と cos の和で表す。未知数は $A$ と $B$ の 2 個である。

$$i = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{16}$$

$$\frac{di}{dt} = -\omega B\sin\omega t + \omega A\cos\omega t$$

微分方程式に代入し、整理すると次式が得られる。

$$(RA - \omega LB)\sin\omega t + (RB + \omega LA)\cos\omega t = E\sin\omega t$$

sin の項と cos の項をそれぞれ等しいとおくと、以下の連立 1 次方程式が得られ、係数 $A$ と $B$ が求まる。

$$\begin{pmatrix} R & -\omega L \\ \omega L & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I\sin(\omega t + \theta)$ の形の解が必要なときは以下のように求める。$I\sin(\omega t + \theta) = I\cos\theta\sin\omega t + I\sin\theta\cos\omega t$ なので、$A = I\cos\theta$, $B = I\sin\theta$ である。ゆえに $I = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\theta = \tan^{-1} B/A$ で求まる。

### 4.3　検討

本節での議論を整理すると以下のようになる。正弦関数を表す方法として、(13) と (16) の 2 つの形式がある。波形を描くときは振幅と位相を変数とする (13) が便利であるが、微分方程式に代入して計算するときは (16) の方が、未知数を求める式が連立 1 次方程式となるので、見通しがよい。sin と cos の和で表す (16) の方が分かりやすいと思うが、書籍(1) 以外では採用されていない。

## 5. 複素記号法の数学的な説明

ここでの提言は「複素記号法の根拠となる数式を明確に記述しよう」である。

複素記号法は魔法のような方法である。交流回路を sin,

cos を使って解くと厄介であるが、$\dot{I}\,e^{j\omega t}$ という形を使うと、微分は $j\omega$, 積分は $1/(j\omega)$ に置換され、複素数の代数方程式となる。本稿ではドット付きの文字は複素数を表す。オイラーの公式を使って sin, cos を指数関数で置換する方法として、2 つの方法がある。

### 5.1 虚部（あるいは実部）をとる方法

$I\sin(\omega t+\theta)$を以下のように表す。

$$I\sin(\omega t+\theta)=\mathrm{Im}\left\{I\,e^{j(\omega t+\theta)}\right\}=\mathrm{Im}\left\{I\,e^{j\omega t}e^{j\theta}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\dot{I}\,e^{j\omega t}\right\} \quad (17)$$

ここで $\dot{I}=Ie^{j\theta}$ である。複素数の絶対値が振幅を表し、偏角が位相を表す。以下の定理が根幹である。

> 複素関数を微分することは、実部と虚部をそれぞれ微分することであるから、微分してから虚部をとるのと、虚部をとってから微分するのは等しい。

筆者は上記の説明に書籍[5] で初めて出会った。そしてそれ以外の書籍では上記の説明を見たことがない。

言い換えると『「微分操作」と「虚部をとる操作」の順番は交換可能である』となる。以下のように確認できる。

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\right\}=\frac{d}{dt}\sin\,\omega t=\omega\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{j\omega e^{j\omega t}\right\}=\omega\cos\,\omega t$$

電源電圧は

$$E\sin\omega t=\mathrm{Im}\{E\,e^{j\omega t}\} \quad (18)$$

と表せる。(17)(18) を RL 回路の微分方程式（12）に代入し、「虚部をとる操作」と「微分操作」を入れ替えると、次式が得られる。

$$\mathrm{Im}\left\{\left(R\dot{I}+j\omega L\dot{I}-E\right)e^{j\omega t}\right\}=0 \quad (19)$$

上式がいかなる $t$ でも成立するには、(　　) の中が 0 になればよい。すなわち、次式が満たされれば良い。

$$R\,\dot{I}+j\omega L\,\dot{I}=E \quad (20)$$

（20）は（12）に対して「電圧と電流を複素数で表し、微分を $j\omega$ で置換する」ことと等価である。微分方程式を解くことが複素数の代数方程式を解くことに置換される。

$A\sin\omega t+B\cos\omega t$ は以下のように表す。

$$A\sin\omega t+B\cos\omega t=\mathrm{Im}\left\{(A+jB)\,e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\dot{I}\,e^{j\omega t}\right\}$$

ここで $\dot{I}=A+jB$ である。複素数の実部が sin の係数、虚部が cos の係数を表す。

ここでは複素数の虚部をとる方法を示した。次のように実部をとる流儀もある。

$$i(t)=\mathrm{Re}\{\dot{I}\,e^{j\omega t}\}$$

$\dot{I}=I\,e^{j\theta}$, $\dot{I}=A+jB$ とするとき、それぞれ以下のようになる。

$$\mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{Ie^{j\theta}e^{j\omega t}\right\}=I\cos(\omega t+\theta)$$
$$\mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{(A+jB)\,e^{j\omega t}\right\}=A\cos\omega t-B\sin\omega t$$

すなわち、実部をとる場合、複素数 $\dot{I}$ が持つ意味は虚部をとるときとは異なり、以下のようになる。

(1) 複素数の絶対値と偏角は cos 関数の振幅と位相を表す。
(2) 複素数の実部は cos 関数の振幅を表し、虚部は sin 関数の振幅に $-1$ をかけたものを表す。

$E$ を正の実数とするとき

$$\mathrm{Re}\left\{E\,e^{j\omega t}\right\}=E\cos\omega t$$

であるから、複素数の回路方程式（20）において、$E$ を正の実数とするなら、実部をとる方法は電源電圧が cos 関数であることを仮定している。すなわち、

$$Ri+L\frac{di}{dt}=E\cos\omega t \quad (21)$$

を解くことを表している。

（20）における電源電圧を正の実数とするなら、「虚部をとる方法」「実部をとる方法」のいずれにおいても、複素数の実部が正のとき、電源電圧と同位相の正弦関数を表す。

### 5.2 複素共役な項を用いる方法

$I\sin(\omega t+\theta)$ と $E\sin\omega t$ を以下のように表現する。

$$I\sin(\omega t+\theta)=I\frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j}$$
$$=\frac{Ie^{j\theta}\,e^{j\omega t}-Ie^{-j\theta}\,e^{-j\omega t}}{2j}=\frac{\dot{I}e^{j\omega t}-\dot{I}^{*}e^{-j\omega t}}{2j} \quad (22)$$

$$E\sin\omega t=\frac{E\,e^{j\omega t}-E\,e^{-j\omega t}}{2j} \quad (23)$$

ここで $\dot{I}=Ie^{j\theta}$ である。複素数の絶対値が sin の振幅を表し、偏角が位相を表す。(22)(23) を（12）に代入し、両辺に $2j$ をかけ、複素数の公式 $j=(-j)^{*}$, $A^{*}B^{*}=(AB)^{*}$ を適用すると、次式が得られる。

$$\left(R\,\dot{I}+j\omega L\,\dot{I}-E\right)e^{j\omega t}-\left(R\,\dot{I}+j\omega L\,\dot{I}-E\right)^{*}e^{-j\omega t}=0 \quad (24)$$

（24）を満たすには

$$R\,\dot{I}+j\omega L\,\dot{I}=E \quad (25)$$

を満たせばよい。(20) と同じ式が得られた。

$A\sin\omega t + B\cos\omega t$ は以下のように変形する。

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = A\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + jB\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$= \frac{1}{2j}\{(A+jB)e^{j\omega t} - (A-jB)e^{-j\omega t}\}$$

$$= \frac{1}{2j}\{\dot{I}\,e^{j\omega t} - \dot{I}^*\,e^{-j\omega t}\} \qquad (26)$$

ここで $\dot{I} = A + jB$ であり、複素数の実部が sin の係数、虚部が cos の係数を表す。

電源電圧が $E\cos\omega t$ のとき、右辺は

$$E\cos\omega t = \frac{E\,e^{j\omega t} + E\,e^{-j\omega t}}{2} \qquad (27)$$

となる。(24) に対応する式を導出するには、左辺は以下のようになることが必要である。

(1) 分母は $2j$ ではなく 2
(2) $e^{j\omega t}$ の項の符号と $e^{-j\omega t}$ の項の符号は同じ

振幅と位相で表すときは以下のようにおく。

$$I\cos(\omega t + \theta) = I\,\frac{e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}}{2}$$

$$= \frac{Ie^{j\theta}e^{j\omega t} + Ie^{-j\theta}e^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{\dot{I}e^{j\omega t} + \dot{I}^*e^{-j\omega t}}{2} \qquad (28)$$

ここで $\dot{I} = I\,e^{j\theta}$ であり、複素数の絶対値が cos の振幅、偏角が位相を表す。

sin と cos の和で表すときは以下のようにおく。

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = A\frac{j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{j\times 2j} + B\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{(B-jA)e^{j\omega t} + (B+jA)e^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{\dot{I}\,e^{j\omega t} + \dot{I}^*\,e^{-j\omega t}}{2} \qquad (29)$$

ここで $\dot{I} = B - jA$ であり、複素数の実部が cos の係数、虚部が sin の係数に $-1$ をかけたものを表す。

「(28) あるいは (29)」と「その微分」と「(27)」を (21) に代入すると、次式が得られる。

$$\left(R\,\dot{I} + j\omega L\,\dot{I} - E\right)e^{j\omega t} + \left(R\,\dot{I} + j\omega L\,\dot{I} - E\right)^* e^{-j\omega t} = 0 \qquad (30)$$

(30) を満たすには (25) が満たされればよい。

(12) から (24) を導出するときは両辺に $2j$ をかけ、(21) から (30) を導出するときは両辺に 2 をかけた。複素数 $\dot{I}$ が表す関数は (24) と (30) で異なる。(24) における $\dot{I}$ は「5.1 節の虚部をとる方法」と一致し、(30) における $\dot{I}$ は「5.1 節の実部をとる方法」と一致する。

また、5.1 節のときと同様に、(24)(30) のいずれにおいても、複素数の実部が正のとき、電源電圧と同位相の正弦関数を表す。

### 5.3 検討

筆者は (18) よりも (22) の方が数学的に明快であると思う。しかし (22) を用いる教科書は、ほとんどないようである。複素共役という新しい概念を使用することに高い敷居を感じるのかもしれない。

以下のような数式を見ることがある。

$$v(t) = j\omega L\cdot i(t)$$

この等式が成立するには、電流 $i(t)$ と電圧 $v(t)$ はそれぞれ複素関数 $\dot{I}\,e^{j\omega t}$, $\dot{V}e^{j\omega t}$ でないといけない。現実の電流や電圧は複素数ではなく実数なので、この説明は混乱を招くと思う。$j\omega$ が含まれる数式では、電圧・電流は時間関数ではなく 1 個の複素数として取り扱うべきである。

## 6. キルヒホッフの法則を使った回路方程式の組み方

ここでの提言は「必要十分な式をたてるための方法を明記し、ループ方程式における電流源の扱い方、節点方程式における電圧源の扱い方を記そう」である。

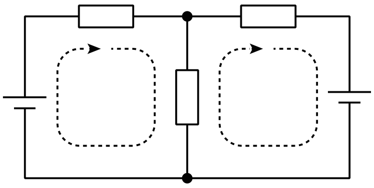
電気回路を解く方法は主に以下の 2 つである。

(1) ループ電流を使う。電流則は自動的に満たされ、電圧則に基づく式をたてる。
(2) 節点方程式をたてる。電圧則は自動的に満たされ、電流則に基づく式をたてる。

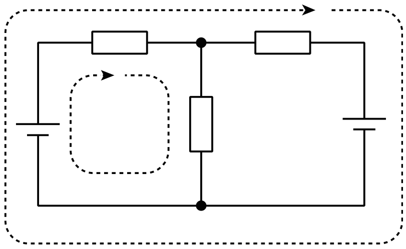
### 6.1 電圧則に基づいた式をたてる方法（ループ電流を使う方法）

ループ電流を使う方法は、定番的な方法として、ほぼ全ての教科書に掲載されている。以下の自由度がある。

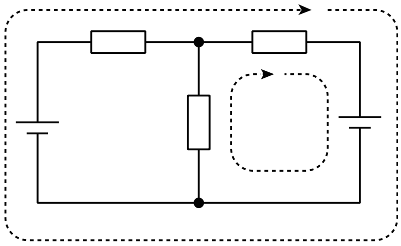
(1) 電流ループの取り方
(2) 電圧則に基づく式をたてるときのループの取り方



(a)



(b)



(c)

図 3　ループの取り方

図 3 の回路であれば、ループの取り方は (a)〜(c) の 3 通りある。電流ループの取り方と、式をたてるときのループの取り方は異なっていてもよい。それぞれ 3 通りあるので、図 3 の回路をループ電流を使って解くとき、9 通りの方法がある。

電流ループの取り方、式をたてるときのループの取り方ともに、1 次独立になるようにとる必要がある。最も明快な方法は、以下のように設定することであると思われる。

- 「電流ループ」と「電圧則に基づく式を立てるときのループ」は同一経路にとる。
- 各ループはショートカットする経路がないようにとる

この様子を図 4 に示す。このようにループを設定することで、必要十分な方程式が得られる。

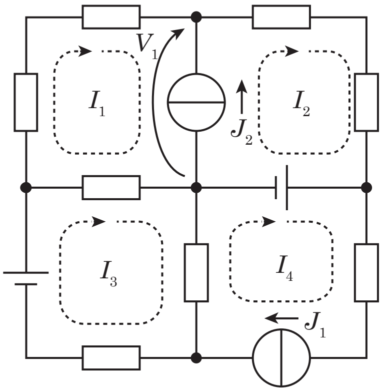



図 4　電流源が存在するとき

電流源が存在するときのループ方程式について考える。電流源の両端電圧が分からないと、電圧則の式を立てることができない。特別な場合として「電流源と並列な抵抗がある」ときは「電圧源と直列な抵抗」に置換可能である[6]。一般的には以下のように対処する。図 4 について考える。

(1) 回路の外周に電流源が含まれるとき………$I_4 = J_1$ であり、ループ電流 $I_4$ の解が即座に求まる。ループ $I_4$ に沿っての式をたてる必要がなくなるので、$J_1$ の両端電圧は不要となる。

(2) それ以外のとき………電流源 $J_2$ については、その電流源を含むループ $I_1$ と $I_2$ の関係が $I_2 - I_1 = J_2$ と得られ、未知数が 1 個減る。その代わり、以下の (2a)(2b) のどちらかが必要である。

(2a) 電流源の両端電圧 $V_1$ を新たな未知数として加えて、電圧則の式をたてる。

(2b) 式をたてるときのループの経路から $I_1$ と $I_2$ に沿ってのループを削除し、図 5 の赤色ループを新規に設定する。式の個数が 1 個減る[7]。

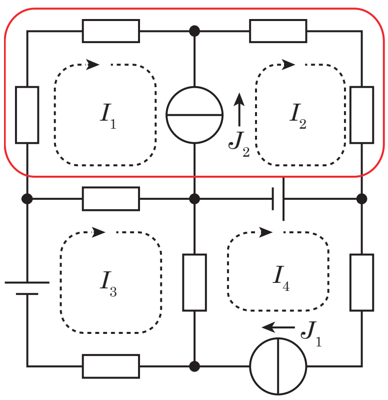



図 5　電流源を (2b) に従って取り扱う方法

### 6.2 電流則に基づいた式をたてる方法（節点方程式をたてる方法）

節点方程式をたてる方法は、基準点（アースとなる点）以外の節点電圧を未知数とし、未知数として扱う節点における電流則の式をたてる。電圧則は自動的に満たされ、必要十分な式が得られる。基準点における電流則は自動的に満たされる。この方法は、ループ方程式をたてる方法よりも式をたてるときの誤りが起こりにくく（符号誤りが起きにくい）、優れた方法である。しかし、高校の物理の教科書には出てこない。その理由は、ポピュラーな電源である電圧源の扱い方が厄介であるからと思われる。大学の教科書においても、節点方程式を用いて解く回路に電流源しか含まれていないものがある。

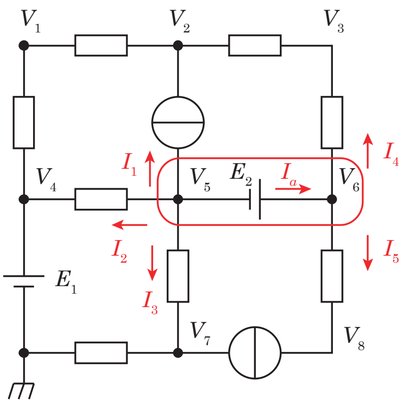



図 6　節点方程式における電圧源の扱い方

図 6 の回路を節点方程式で解く。節点方程式における電圧源の扱い方は以下の通りである[7]。

(1) 基準点に電圧源が接続されているとき………即座に解が求まる。図 6 の場合 $V_4 = E_1$ である。$V_4$ の節点における電流則の式は不要になる。

(2) それ以外のとき………$V_5 + E_2 = V_6$ なので、未知数が 1 個減る。その代わり、以下の（2a)(2b）のいずれかが必要である。

(2a) $E_2$ を流れる電流 $I_a$ を新たな未知数として追加する。

(2b) 節点 $V_5$ と $V_6$ を統合して 1 つの節点とし、$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$ という式をたてる。

### 6.3 電圧則と電流則の両方を使う方法（枝電流を使う方法）

この方法は、「ループに沿って電圧則の式を立てる」「節点において電流則の式をたてる」の 2 種類の式をたてる必要がある。電圧と電流の両方が未知数となり、未知数の個数も多くなり、式をたてるときの抜けが起こりやすいので、良い方法とは言えないと思う。未知数をむやみに増やして、解きづらくしているように感じる。しかし、少なくない教科書でこの方法が紹介されており、高校の物理の教科書でも採用されている。

## 7. 重ね合わせの理の説明

ここでの提言は「重ね合わせの理を説明するとき、実用的な回路を使おう」である。

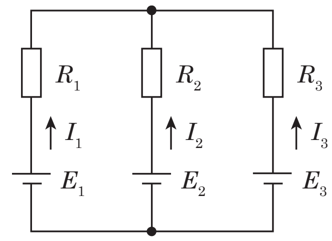



図 7　重ね合わせの理の適用例

図 7 は「重ね合わせの理」を理解するための図として、ポピュラーな図である。この図は大変インパクトがあり分かりやすい。しかし机上の理論と言える回路であり、実際に組むと問題があると思われる。なぜなら、$I_1 \sim I_3$ のうち、1 個あるいは 2 個は負の値をとる。これは電源に対して電流を流し込む（充電）ことを意味する。乾電池や直流安定化電源に電流を流し込むと、発熱や故障につながると思われる。

「重ね合わせの理」を説明するのに図 7 は大変分かりやすいので、最初の説明に図 7 の回路を用いるのはよいが、実用的な応用例も出すべきである。「重ね合わせの理」の効果的な応用例は、回路に直流と交流が混在する場合に、それを別々に解析する例である。その典型例の一つは、「トランジスタのエミッタ接地増幅回路」である。「直流のバイアス回路」と「交流の小信号等価回路」の重ね合わせで解析する。しかし、エミッタ接地増幅回路は実用としてはほとんど用いられていないようである[8]。

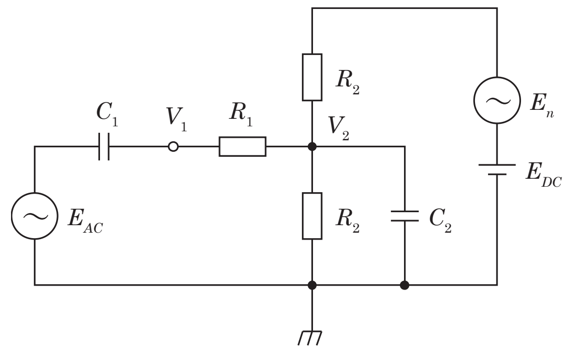
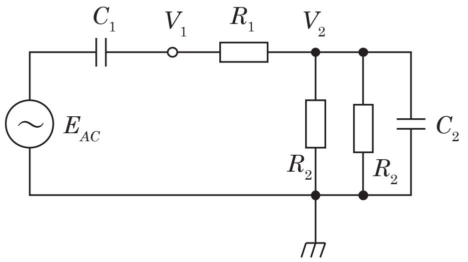



図 8　重ね合わせの理を使う例

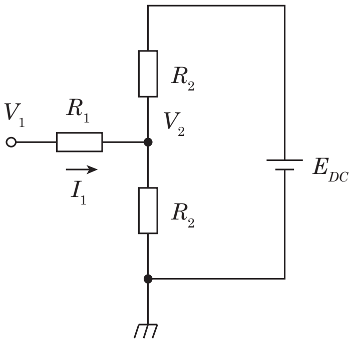
筆者は「重ね合わせの理」の実用的かつ効果的な適用例として、図 8 の回路を推奨したい。この回路は信号電圧 $E_{AC}$ を $(1/2)\,E_{DC}$ シフトさせた電圧を $V_1$ として得る回路である。直流電源に乗るノイズを $E_n$ で表しており、この回路はノイズの影響を受けない工夫を持つ。

この回路の動作原理は重ね合わせの理で説明できる。3 つの電圧源によって生じる電圧を加算すればよい。

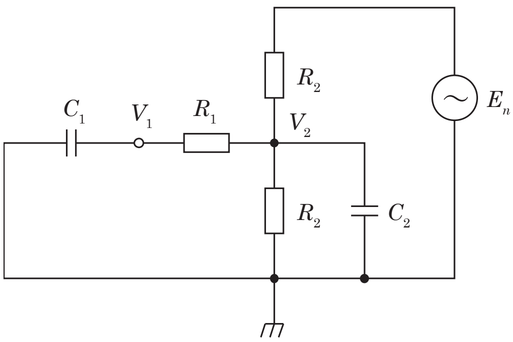
仮定として $C_1$, $C_2$ は大きな容量であり、交流に対しては導通状態と見なせることとする。




(a) $E_{AC}$ に関する回路




(b) $E_{DC}$ に関する回路




(c) $E_n$ に関する回路

図 9　3 つの電源の重ね合わせ

図 9 (a) について考える。仮定により $C_1$, $C_2$ は導通状態なので、$V_2 = 0$ であり、電圧 $E_{AC}$ は全て $R_1$ にかかる。$V_1 = E_{AC}$ である。

同図 (b) について考える。コンデンサは直流に関しては断線状態とみなせるので、不要な部分はカットしてある。電圧 $E_{DC}$ を 1/2 に分圧するので、$V_2 = (1/2)\,E_{DC}$ である。電流 $I_1 = 0$ であり、$R_1$ による電圧降下はないので、$V_1 = V_2$ である。結局 $V_1 = (1/2)\,E_{DC}$ である。

同図 (c) について考える。仮定より $C_2$ は導通状態なので、$V_2 = 0$ である。$V_1$ はアースと $V_2$ の間の電圧なので、$V_1 = 0$ である。

結果として、$V_1$ は $E_{AC}$ に $(1/2)\,E_{DC}$ を加えたものであり、$E_n$ の影響を受けない。このように実用的な例を重ね合わせの理の説明に取り入れることで、理解が深まると考える。

## 8. おわりに

電気回路の教科書を分かりやすくするための 6 個の提言を行った。本稿が日本の電気回路の教科書がより分かりやすくなることに貢献できれば、幸いである。

筆者が電気回路の教科書[1]を執筆するとき、その過程で 20 冊以上の電気回路の教科書を読んだ。筆者が読んだ教科書はごく一部である。本稿は筆者が調べた範囲で書いており、誤りや抜けがあるかもしれない。本稿に対する誤り、反論などを筆者にメールで知らせていただければ幸いである。以下の筆者の Web サイトで議論したいと考えている。また「複素記号法の全て」というタイトルの小冊子を下記のサイトで配布する。

http://denki.nara-edu.ac.jp/~yabu/circuit/

将来 url が移転しても、「電気回路　教科書　分かりやすい　薮哲郎　教育フロンティア　電気学会」で検索すると上記のページに辿り着けるようにする。

## 文　　献

(1) 薮哲郎：「世界一わかりやすい電気・電子回路　これ一冊で完全マスター！」, p.147, 講談社 (2017)
(2) 藤井信生：「基本から学ぶ電気回路」, p.89, 電気学会 (2011)
(3) 山田博仁：http://www5a.biglobe.ne.jp/~babe/DenkikairoII_2021/DenkikairoII_9.pptx (2021/8/21 アクセス)
(4) 電気学会：「電気回路論」, p.21, 電気学会 (1952)
(5) 小澤孝夫：「電気回路 I [基礎・交流編]」, p.34, 昭晃堂 (1978)　この本は後継版が朝倉書店より出ている
(6) 宮本俊幸：「電気回路の基礎」, p.36, コロナ社 (2021)
(7) 佐藤秀則ら：「電気回路教室」, p.206, 森北出版 (2013)
(8) 別府俊幸ら：「オペアンプからはじめる電子回路入門」, p.i (まえがきの中), 森北出版 (2016)