複素記号法の全て

2021.6.18　　初版作成
2021.9.1　　最終改訂

奈良教育大学　　薮哲郎

1　はじめに

交流回路の理解は電気回路学習における最大の難関である。「交流理論を理解できるか否か ＝ 電気回路を理解できるか否か」と言っても過言ではない。「交流理論を分かりやすく説明するにはどうすればよいか」は電気回路を教えるときの永遠の課題であり、いまだに解決されていないように見える。

交流理論の根幹をなすのが複素記号法である。本稿では複素記号法の説明の前段階で登場する「実関数による交流回路の解法」を最初に説明する。次に「複素記号法」の数学的に厳密な説明を行う。

実関数による解法は 2 通りの方法があり、複素記号法の説明にも 2 通りの方法がある。本稿では、それらの方法を網羅する。

どの方法が最上であるかは読者に委ねる。

2　今から解く問題

図 1 の RL 回路は多くの教科書で交流回路の最初の例題として用いられる回路である。実用的には RL 回路はほとんど使われず、RC 回路の方が圧倒的にポピュラーであるが、方程式を立てる過程が分かりやすく、解くべき方程式が明解なので、よく用いられている。本稿では図 1 の解き方を詳しく説明する。

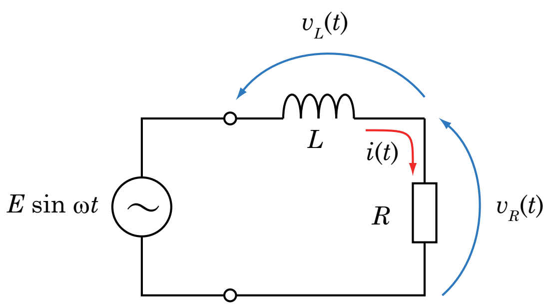

図 1　RL 回路

図 1 の回路において電流 $i(t)$ を求める問題を考える。

$$v_R(t) = R\,i(t) \tag{1}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2}$$

より、$i(t)$ に関する以下の微分方程式が導出される。

$$R\,i + L\,\frac{di}{dt} = E\sin\omega t \tag{3}$$

未知関数 $i(t)$ を求める方法として、多くの教科書では最初に実関数 sin, cos を用いて解く方法が提示される。sin, cos を使う方法には以下の 2 つの方法がある。

1. $i(t) = I\sin(\omega t + \theta)$ とおく
2. $i(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ とおく

実関数を用いて解く方法が提示された後、複素数を使って解く方法が提示される。複素数を使って交流回路が解けることを説明する方法として、以下の 2 つの方法がある。

1. $i(t) = \mathrm{Im}\left\{\dot{I}\,e^{j\omega t}\right\}$ あるいは $i(t) = \mathrm{Re}\left\{\dot{I}\,e^{j\omega t}\right\}$ とおく
2. $i(t) = \dfrac{\dot{I}e^{j\omega t} - \dot{I}^{*}e^{-j\omega t}}{2j}$ あるいは $i(t) = \dfrac{\dot{I}e^{j\omega t} + \dot{I}^{*}e^{-j\omega t}}{2}$ とおく。

各方法について、詳しく解説する。

3 実関数を使って解く方法

3.1 振幅と位相を未知数とする

電流 $i(t)$ を以下のように置く。

$$i(t) = I\sin(\omega t + \theta) \tag{4}$$

未知数は振幅 I と位相 θ の 2 個である。$i(t)$ の微分は以下である。

$$\frac{di}{dt} = I\omega\cos(\omega t + \theta) \tag{5}$$

(4)(5) を (3) に代入すると、次式が得られる。

$$RI\sin(\omega t + \theta) + \omega LI\cos(\omega t + \theta) = E\sin\omega t \tag{6}$$

(6) において、未知数のうち θ は $\sin(\omega t + \theta)$ と $\cos(\omega t + \theta)$ という項の中に入っており、これを解くことは容易ではない。2 つの解法がある。

加法定理を逆方向に適用して解く

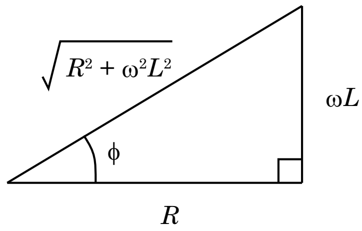

図 2　R と ωL の関係

加法定理を逆方向に適用するため、図 2 のような直角三角形を考える。以下の関係が成立する。

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{7}$$

$$\sin\phi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \tag{8}$$

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \tag{9}$$

(6) の左辺を以下のように変形する [1]。

$$RI\sin(\omega t+\theta)+\omega LI\cos(\omega t+\theta)$$

この変形を思いつくのは困難

$$= I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\left\{\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\theta)+\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\theta)\right\} \tag{10}$$

(8)(9) を代入

$$= I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\{\cos\phi\sin(\omega t+\theta)+\sin\phi\cos(\omega t+\theta)\}$$

加法定理を逆方向に適用

$$= I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} \tag{11}$$

(11) が右辺の $E\sin\omega t$ に等しいので、次式が得られる。

$$I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} = E\sin\omega t \tag{12}$$

振幅と位相がそれぞれ等しいとおく。

$$I\sqrt{R^2+\omega^2L^2} = E$$

$$\therefore I = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

$$\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} = \sin\omega t$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta + \phi &= 0 \qquad (13) \\ \theta &= -\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad (14) \end{aligned}$$

結局、以下の解が得られた。

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\theta) \qquad (15) \\ \theta &= -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad (16) \end{aligned}$$

この解き方は (10) の変形と、加法定理を逆方向に適用して (11) を得る部分が、かなりアクロバティックである。

筆者はこの方法を 1952 年に発行された書籍 [1] から学んだ。1970 年に発行された改訂版 [2] は、(11) の変形の部分が少し異なっている。改訂版 [2] は (6) の左辺を以下のように変形している。[1]。

$$\begin{aligned} & RI\sin(\omega t+\theta)+\omega LI\cos(\omega t+\theta) \\ &= RI\left\{\sin(\omega t+\theta)+\frac{\omega L}{R}\cos(\omega t+\theta)\right\} \\ &= RI\left\{\sin(\omega t+\theta)+\tan\phi\,\cos(\omega t+\theta)\right\} \\ &= RI\left\{\sin(\omega t+\theta)+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\,\cos(\omega t+\theta)\right\} \\ &= RI\frac{1}{\cos\phi}\left\{\cos\phi\sin(\omega t+\theta)+\sin\phi\,\cos(\omega t+\theta)\right\} \\ & \qquad \text{加法定理を逆方向に適用} \\ &= RI\frac{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}{R}\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} \\ &= I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} \qquad (17) \end{aligned}$$

これらの加法定理を逆方向に適用する方法は、ひらめきが必要であり、分かりやすいとは言い難い。

[1]改訂版 [2] では RL 回路の解析が消え、いきなり RLC 回路の解析を行っている。そして、$\frac{R}{\cos\phi}$ の部分を以下のように変形している。

$$R\frac{1}{\cos\phi} = R\sqrt{1+\tan^2\phi} = \sqrt{R^2+R^2\tan^2\phi} = \sqrt{R^2+R^2\frac{\omega^2L^2}{R^2}} = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}$$

上記の変形は回りくどくて、わかりにくいので、(17) の導出では $\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ を用いた。

(4) では解を $i(t) = I\sin(\omega t+\theta)$ とおいた。$i(t) = I\cos(\omega t+\theta)$ とおいた場合も、解き方は同じである。加法定理を逆方向に適用して左辺を

$$I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\sin\{(\omega t+\theta)+\phi\} \tag{18}$$

という形に変形することで解ける。ϕ を与える数式が異なる。

電源電圧が $E\sin\omega t$ ではなく、$E\cos\omega t$ として与えられたときは、加法定理を逆方向に適用して左辺を

$$I\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot\cos\{(\omega t+\theta)+\phi\} \tag{19}$$

という形に変形することで解ける。

sin と cos の項を加法定理で展開して求める

(6) の左辺を以下のように加法定理で展開し、$\sin\omega t, \cos\omega t$ の項でそれぞれくくる。

$$\begin{aligned}
&RI\sin(\omega t+\theta)+\omega LI\cos(\omega t+\theta)\\
&\qquad\text{加法定理で展開}\\
=\ & RI\left(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta\right)+\omega LI\left(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta\right)\\
&\qquad \sin\omega t,\ \cos\omega t\ \text{でくくる}\\
=\ & (RI\cos\theta-\omega LI\sin\theta)\sin\omega t+(RI\sin\theta+\omega LI\cos\theta)\cos\omega t
\end{aligned} \tag{20}$$

これが右辺の $E\sin\omega t$ と等しいので、次式が得られる。

$$(RI\cos\theta-\omega LI\sin\theta)\sin\omega t+(RI\sin\theta+\omega LI\cos\theta)\cos\omega t = E\sin\omega t \tag{21}$$

sin の項と cos の項がそれぞれ等しいとおいて、以下の 2 式が得られる。

$$RI\cos\theta-\omega LI\sin\theta = E \tag{22}$$

$$RI\sin\theta+\omega LI\cos\theta = 0 \tag{23}$$

この方法は

$\sin\omega t$ が付く項と $\cos\omega t$ が付く項に分離し、それぞれ等しいとおく

という考え方である。「加法定理を逆方向に適用する方法」と比べると、最初から見通しが立っているので、分かりやすいと思う。

しかし、得られた2つの方程式 (22)(23) は連立 1 次方程式ではないので、解くためのシステマティックな方法はない。今回の場合は、以下の方法により I と θ を求めることができる。

(23) より以下のように θ が求まる。

$$
\begin{aligned}
R\sin\theta + \omega L\cos\theta &= 0 \\
&\quad \text{両辺を } R\cos\theta \text{ で割って左辺第 2 項を右辺へ移項} \\
\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= -\frac{\omega L}{R} \\
\tan\theta &= -\frac{\omega L}{R} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \\
&= -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

この関係を図 3 に示す。

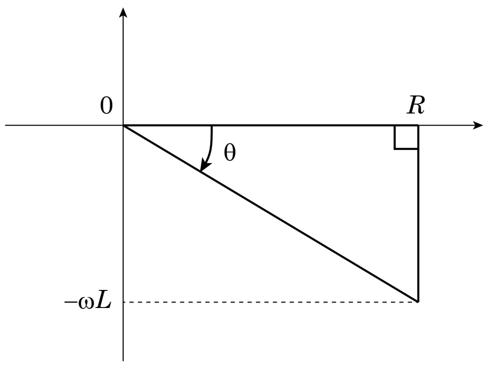

図 3　R と ωL の関係

θ が負の値なので、符号に注意して以下の 2 式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{-\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad (25) \\
\cos\theta &= \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

(22) に (25)(26) を代入して以下のように I を求める。

$$
(R\cos\theta - \omega L\sin\theta)\ I = E
$$

$$\begin{aligned}\left(R\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}-\omega L\frac{-\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\right)I &= E\\ \frac{R^2+\omega^2L^2}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}I &= E\\ \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\cdot I &= E\\ I &= \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad (27)\end{aligned}$$

この方法は、「加法定理を逆方向に適用する方法」より分かりやすいと思うのだが、採用している教科書を筆者は知らない。

図 1 では電源電圧が $E\sin\omega t$ で与えられることを仮定した。$E\cos\omega t$ で与えられた場合は、(22)(23) の右辺を入れ替えた以下の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned}RI\cos\theta-\omega LI\sin\theta &= 0 \qquad (28)\\ RI\sin\theta+\omega LI\cos\theta &= E \qquad (29)\end{aligned}$$

(28) より θ が求まり、(29) より I が求まる。

また、解を $I\cos(\omega t+\theta)$ とおいた場合、加法定理で展開し、$\sin\omega t$ が付く項と $\cos\omega t$ が付く項に分けて整理すると、以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}-RI\sin\theta-\omega LI\cos\theta &= \text{電源の}\sin\text{項の係数}\\ RI\cos\theta-\omega LI\sin\theta &= \text{電源の}\cos\text{項の係数}\end{aligned}$$

解き方は同じである。右辺が 0 の式より θ が求まり、それ以外の式より I が求まる。

3.2 sin と cos の係数を未知数とする

電流 $i(t)$ を以下のように置く。

$$i(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t \qquad (30)$$

未知数は A と B の 2 個である。微分すると以下のようになる。

$$\frac{di}{dt}=\omega A\cos\omega t-\omega B\sin\omega t \qquad (31)$$

(30)(31) を基本式

$$Ri+L\frac{di}{dt}=E\sin\omega t \qquad (32)$$

に代入し、sin の項と cos の項に分けて整理すると、次式を得る。

$$(RA-\omega LB)\sin\omega t+(RB+\omega LA)\cos\omega t=E\sin\omega t \tag{33}$$

sin の項と cos の項がそれぞれ等しいとおくと、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$RA - \omega LB = E \tag{34}$$

$$\omega LA + RB = 0 \tag{35}$$

行列で書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} R & -\omega L \\ \omega L & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

未知数 A と B は以下のように得られる。

$$A = \frac{RE}{R^2+\omega^2L^2} \tag{37}$$

$$B = \frac{-\omega LE}{R^2+\omega^2L^2} \tag{38}$$

これより以下の解が得られる。

$$i(t)=\frac{RE}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t-\frac{\omega LE}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t \tag{39}$$

(39) の形からは波形を描くことができない。波形を描くには $I\sin(\omega+\theta)$ あるいは $I\cos(\omega+\theta)$ の形に直す必要がある。$I\sin(\omega+\theta)$ に直す方法を示す。

$I\sin(\omega+\theta)$ を展開すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} I\sin(\omega t+\theta) &= I\left(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta\right) \\ &= I\cos\theta\,\sin\omega t+I\sin\theta\,\cos\omega t \end{aligned} \tag{40}$$

(40) と (30) を見比べて

$$A = I\cos\theta \tag{41}$$

$$B = I\sin\theta \tag{42}$$

が得られる。この関係を図 4 に示す。

図 4 より、次式が得られる。

$$I = \sqrt{A^2+B^2} \tag{43}$$

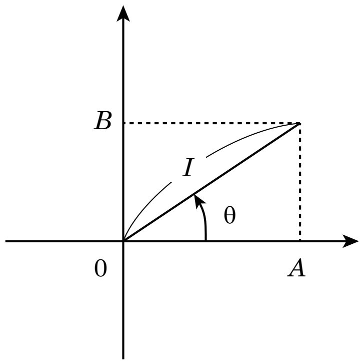

図 4　A, B, I の関係

$$\theta = \tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{44}$$

(37)(38) を利用して I と θ を求めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{A^2+B^2} \\ &= \sqrt{\frac{R^2E^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}+\frac{\omega^2L^2E^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(R^2+\omega^2L^2)E^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}} \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad (45) \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{B}{A} \\ &= \tan^{-1}\frac{-\omega L}{R} \\ &= -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad (46) \end{aligned}$$

(45)(46) の結果は、前節で得た結果 (13)(14) と一致する。

3.3　検討

$i(t)$ を $I\sin(\omega t+\theta)$ で表す方法も $A\sin\omega t+B\cos\omega t$ で表す方法も、どちらも未知数は 2 個である。$A\sin\omega t+B\cos\omega t$ は線形の連立 1 次方程式が得られるのに対して、$I\sin(\omega t+\theta)$ は線形の方程式にならず、見通しが悪い。筆者は $A\sin\omega t+B\cos\omega t$ の方が分かりやすいと感じる。この方法は拙著 [4] で採用している（ただし $A\cos\omega t+B\sin\omega t$ としている）。筆者の知る限り、2021.8 の時点で、それ以外の書籍で $A\sin\omega t+B\cos\omega t$ のパターンを採

用している書籍は見あたらない。

電源電圧が $E\cos\omega t$ で表されるときは、(34) の右辺が 0 となり、(35) の右辺が E となる。解き方は同じである。

4 本節以降で使う複素数の公式

本稿では複素数は上にドットをつけて $\dot{I}$ のように表す。本稿で使う公式を確認しておく。数学で最も美しいと言われるオイラーの公式を以下に示す。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

以下の関係が得られる。

$$\sin\omega t = \mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\right\} \quad (47)$$

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\right\} \quad (48)$$

以下の関係が成立する。ただし、R は実数, 右肩の $*$ 印は複素共役を表す。

$$e^{j(\alpha+\beta)} = e^{j\alpha}e^{j\beta} \quad (49)$$

$$\mathrm{Im}\left\{\dot{A}+\dot{B}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\dot{A}\right\} + \mathrm{Im}\left\{\dot{B}\right\} \quad (50)$$

$$\mathrm{Re}\left\{\dot{A}+\dot{B}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{A}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\dot{B}\right\} \quad (51)$$

$$R\cdot\mathrm{Im}\left\{\dot{A}\right\} = \mathrm{Im}\left\{R\cdot\dot{A}\right\} \quad (52)$$

$$R\cdot\mathrm{Re}\left\{\dot{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{R\cdot\dot{A}\right\} \quad (53)$$

$$j = (-j)^* \quad (54)$$

$$(\dot{A}\dot{B})^* = \dot{A}^*\dot{B}^* \quad (55)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \quad (56)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \quad (58)$$

5 複素関数を用いて解く方法

複素記号法は実関数で解くと煩雑である交流回路を魔法のように簡単に解く方法である。複素記号法が成立することを数学的に厳密に説明する方法は、2 個ある。以下でそれぞれの方法について述べる。

5.1 虚部（あるいは実部）をとる方法

虚部をとる

この方法は多くの教科書が採用している。(47) (p.10) を利用して、以下のようにおく。未知数は I と θ の 2 つである。

$$\begin{aligned} i(t) &= I\sin(\omega t+\theta) \\ &= \mathrm{Im}\left\{Ie^{j(\omega t+\theta)}\right\} \\ &= \mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}e^{j\theta}\right\} \\ &= \mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} \end{aligned} \tag{59}$$

ここで以下の関係がある。

$$\dot{I} = Ie^{j\theta} \tag{60}$$

未知数 I と θ は複素数 $\dot{I}$ の絶対値と偏角である。(59) を基本式

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E\sin\omega t \tag{61}$$

に代入すると、次式が得られる。

$$R\ \mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} + L\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] = E\ \mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\right\} \tag{62}$$

以下の重要な性質がある。

> 複素関数を微分することは、実部と虚部をそれぞれ微分することであるから、
> 微分してから虚部をとるのと、虚部をとってから微分するのは等しい。

筆者はこの性質を書籍 [3] で学んだ。上記の性質より「微分操作」と「虚部をとる操作」の順序は交換可能である。

まず、複素数の微分公式

$$\frac{d}{dt}\,e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \tag{63}$$

が成立することを確認する。

● 微分の公式の確認

• オイラーの公式で分解してから微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,e^{j\omega t} &= \frac{d}{dt}\,(\cos\omega t + j\sin\omega t)\\ &= -\,\omega\sin\omega t + j\omega\cos\omega t \end{aligned}\tag{64}$$

• 微分公式を適用してからオイラーの公式で分解

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,e^{j\omega t} &= j\omega e^{j\omega t}\\ &= j\omega\,(\cos\omega t + j\sin\omega t)\\ &= j\omega\cos\omega t - \omega\sin\omega t \end{aligned}\tag{65}$$

以上より (63) が成立することを確認した。次に複素関数 $\dot{I}e^{j\omega t}$ について、

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] = \mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right\} \tag{66}$$

が成立することを確認する。

● (66) の確認

• 虚部をとってから微分する

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] &= \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{Ie^{j\theta}e^{j\omega t}\right\}\right]\\ &= \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{Ie^{j(\omega t+\theta)}\right\}\right]\\ &= \frac{d}{dt}\,\sin(\omega t+\theta)\\ &= \omega I\cos(\omega t+\theta)\end{aligned}\tag{67}$$

• 微分してから虚部をとる

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] &= \mathrm{Im}\left[j\omega\dot{I}e^{j\omega t}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[j\omega I e^{j\theta}e^{j\omega t}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[j\omega I e^{j(\omega t+\theta)}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[j\omega I\left\{\cos(\omega t+\theta)+j\sin(\omega t+\theta)\right\}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[j\omega I\cos(\omega t+\theta)-\omega I\sin(\omega t+\theta)\right] \\
&= \omega I\cos(\omega t+\theta)
\end{aligned} \tag{68}
$$

上記のように「微分操作」と「虚部をとる操作」の順序が交換可能であることを確認できた。(62) の左辺第 2 項は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
L\,\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] &= L\ \mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right\} \qquad \text{微分と虚部をとる操作を交換} \\
&\qquad \dot{I}\ \text{は定数なので外に出す} \\
&= L\ \mathrm{Im}\left\{\dot{I}\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\right\} \\
&\qquad \text{微分する} \\
&= L\ \mathrm{Im}\left\{\dot{I}\ j\omega e^{j\omega t}\right\} \\
&\qquad L\ \text{は実数なのでカッコの中に入れる} \\
&= \mathrm{Im}\left\{j\omega L\dot{I}e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned} \tag{69}
$$

(69) を適用し、(62) に対して実数 R と E を $\mathrm{Im}\{\quad\}$ の中に入れて、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left\{R\dot{I}e^{j\omega t}\right\}+\mathrm{Im}\left\{j\omega L\dot{I}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Im}\left\{Ee^{j\omega t}\right\} \\
\mathrm{Im}\left\{R\dot{I}e^{j\omega t}+j\omega L\dot{I}e^{j\omega t}-Ee^{j\omega t}\right\} &= 0 \\
\mathrm{Im}\left\{\left(R\dot{I}+j\omega L\dot{I}-E\right)e^{j\omega t}\right\} &= 0
\end{aligned} \tag{70}
$$

上式がいかなる t に対しても成立するには、カッコの中がゼロであることが必要である。すなわち、回路を表す複素数の方程式として

$$R\dot{I}+j\omega L\dot{I}=E \tag{71}$$

が得られる。$\dot{I}$ について解いて、以下の解が得られる。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+j\omega L} \tag{72}$$

未知数 I と θ を得たいので、(72) の $\dot{I}$ を $Ie^{j\theta}$ の形式で表す。

$$\frac{C_1\, e^{j\theta_1}}{C_2 e^{j\theta_2}} = \frac{C_1}{C_2}\, e^{j(\theta_1-\theta_2)} \tag{73}$$

を利用して求める。$\dfrac{E}{R+j\omega L}$ の分子と分母をそれぞれ $C_1e^{j\theta_1}$, $C_2e^{j\theta_2}$ の形で表す。C_1, C_2 は実数である。

$$\begin{aligned} C_1 &= E \\ \theta_1 &= 0 \\ C_2 &= \sqrt{R^2+\omega^2L^2} \\ \theta_2 &= \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$

である。従って、

$$\frac{E}{R+j\omega L} = \frac{E\ e^{j0}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdot e^{j\theta}} = \frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\ e^{-j\theta} \tag{74}$$

ただし、

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

である。$i(t)$ は

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\theta) \tag{75}$$

である。

複素数として得られた電流 $\dot{I} = Ie^{j\theta}$ は、その絶対値 I と偏角 θ が、実関数 $I\sin(\omega t+\theta)$ の振幅と初期位相に対応する。

ここまでは、複素数 $\dot{I}$ を絶対値と偏角で表した。複素数 $\dot{I}$ を実部と虚部で表すと、どうなるかを考える。$\dot{I} = a+jb$ と表すと、

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Im}\Big\{(a+jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\Big\} \\ &= \mathrm{Im}\Big\{(a\cos\omega t - b\sin\omega t) + j(a\sin\omega t + b\cos\omega t)\Big\} \\ &= a\sin\omega t + b\cos\omega t \end{aligned} \tag{76}$$

である。3.2 項 (p.7) で 未知関数 $i(t)$ を sin と cos の和で表す方法を紹介した。関数 $\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}$ は正弦波を表し、複素数 $\dot{I}$ の実部が sin の係数、虚部が cos の係数を表す。

複素数を $(a+jb)$ の形式で表したときも、「微分操作」と「虚部をとる操作」の順序が交換可能であることを確認しておく。

• 虚部をとってから微分する

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} &= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Im}\Big\{(a+jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\Big\} \\
&= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Im}\Big\{(a\cos\omega t - b\sin\omega t) + j(a\sin\omega t + b\cos\omega t)\Big\} \\
&= \frac{d}{dt}\,(a\sin\omega t + b\cos\omega t) \\
&= \omega a\cos\omega t - \omega b\sin\omega t \qquad (77)
\end{aligned}
$$

• 微分してから虚部をとる

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}\right] &= \mathrm{Im}\Big[(a+jb)j\omega e^{j\omega t}\Big] \\
&= \mathrm{Im}\Big[(j\omega a - \omega b)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\Big] \\
&= \mathrm{Im}\Big\{(-\omega b\cos\omega t - \omega a\sin\omega t) + j(\omega a\cos\omega t - \omega b\sin\omega t)\Big\} \\
&= \omega a\cos\omega t - \omega b\sin\omega t \qquad (78)
\end{aligned}
$$

(77) と (78) の結果が等しいことより、「微分操作」と「虚部をとる操作」の順序が交換可能であることが確認できた。

実部をとる

以上では、複素数 $\dot{I}$ と現実の世界の実関数 $i(t)$ の対応は

$$
i(t) = \mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} \qquad (79)
$$

を仮定した。ほとんどの電気回路の教科書では虚部をとる方法を採用しているが、実部をとる流儀もある。電磁波工学や光工学で使われる複素記号法では、実部をとる方法がメジャーである。以下のように置く。

$$
i(t) = \mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} \qquad (80)
$$

$\dot{I} = Ie^{j\theta}$ と置くと、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{Ie^{j\theta}e^{j\omega t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{Ie^{j(\omega t+\theta)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{I\cos(\omega t+\theta) + jI\sin(\omega t+\theta)\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \quad I\cos(\omega t + \theta) \tag{81}$$

複素数の絶対値と偏角が cos 関数の振幅と位相に対応している。

$\dot{I} = a + jb$ と置くと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{(a+jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{a\cos\omega t - jb\sin\omega t + j(b\cos\omega t + a\sin\omega t)\right\} \\
&= a\cos\omega t - b\sin\omega t
\end{aligned} \tag{82}$$

複素数の「実部」が「cos の係数」,「虚部」が「sin の係数の符号を反転させたもの」に対応している。

以上のように「虚部をとる方法」と「実部をとる方法」では、複素数が表す正弦関数は異なる。

E を正の実数とするとき

$$\mathrm{Re}\left\{Ee^{j\omega t}\right\} = E\cos\omega t \tag{83}$$

であるから、複素数の回路方程式である

$$R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = E \tag{84}$$

において、E を正の実数とするなら、実部をとる方法は、電源電圧が cos であることを仮定している。すなわち、時間領域における方程式

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E\cos\omega t \tag{85}$$

を解くことを表している。この方程式に対応する回路を図 5 に示す。図 1 との違いは、電源電圧が $E\sin\omega t$ から $E\cos\omega t$ に変わっただけである。

「虚部をとる方法」と「実部をとる方法」のどちらが分かりやすいか？　は一長一短であると思われる。筆者はかつて電磁界理論の数値解析の研究者だったので、実部をとることに慣れており、拙著 [4] では実部をとる方法を採用した。実部をとる方法は以下のメリットがある。

- 三角関数では「横軸 (x) は cos」「縦軸 (y) は sin」である。複素平面でも横軸 (実軸) は cos, 縦軸 (虚軸) は sin (ただし符号は反転) とする方が分かりやすい。
- 感覚的に「実部をとる」の方が納得しやすい。

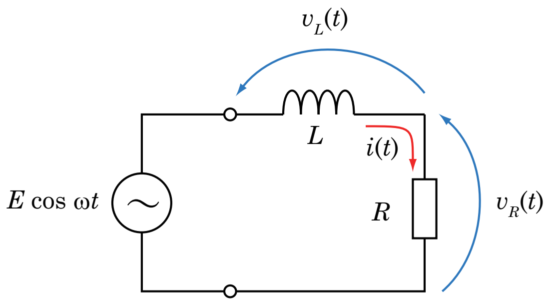

図 5　RL 回路

一方で、以下のデメリットがある。

- 「実部 $=\cos$ の係数」「虚部 $=\sin$ の係数 $\times(-1)$」であり、片方に符号を反転させる操作が必要である。虚部をとる方法は「実部 $=\sin$ の係数」「虚部 $=\cos$ の係数」と明解である。
- 三角関数の代表は sin であり、電源電圧として sin を仮定するほうがなじみやすい。実部をとる方法は電源電圧として cos を仮定することになり、違和感がある。

いずれの方法においても、以下の事実が成立する。

複素数の偏角が 0 のとき、電源電圧と同位相である。

sin 関数と cos 関数は 1/4 周期ずれているだけで、同一の形状である。交流回路の定常現象において、求めるべきものは「振幅と位相」であり、位相については「電源の位相に対する相対的な差」が意味を持つ。

そのことを考えると、電源電圧を sin で表すか cos で表すかは大きな問題とは言えず、「虚部をとる方法」と「実部をとる方法」のどちらが良いか、にこだわる必要はないかもしれない。

5.2　複素共役を用いる方法

電源電圧が sin のとき

$I\sin(\omega t+\theta)$ を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} i(t) &= I\sin(\omega t+\theta) \\ &= I\frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Ie^{j\theta}e^{j\omega t} - Ie^{-j\theta}e^{-j\omega t}}{2j} \\
&= \frac{\dot{I}e^{j\omega t} - \dot{I}^* e^{-j\omega t}}{2j} \qquad (86)
\end{aligned}
$$

ここで $\dot{I} = Ie^{j\theta}$ である。未知数 I と θ は複素数 $\dot{I}$ の絶対値と位相に対応する。$\dot{I}^*$ は $\dot{I}$ の複素共役をとることを表す。以下の関係がある。

$$
\begin{aligned}
\dot{I} &= Ie^{j\theta} \\
\dot{I}^* &= Ie^{-j\theta}
\end{aligned}
$$

(86) を微分すると次式になる。

$$
\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= \frac{j\omega\dot{I}e^{j\omega t} - (-j\omega)\dot{I}^* e^{-j\omega t}}{2j} \\
&\qquad (-j\omega) = (j\omega)^* \text{ と } (j\omega)^*\dot{I}^* = (j\omega\dot{I})^* \text{ を利用} \\
&= \frac{j\omega\dot{I}e^{j\omega t} - (j\omega\dot{I})^* e^{-j\omega t}}{2j} \qquad (87)
\end{aligned}
$$

電源電圧 $E\sin\omega t$ は以下のように表す。

$$
E\sin\omega t = \frac{Ee^{j\omega t} - Ee^{-j\omega t}}{2j} \qquad (88)
$$

(86)(87)(88) を基本式

$$
Ri + L\frac{di}{dt} = E\sin\omega t \qquad (89)
$$

に代入すると次式が得られる。

$$
R\frac{\dot{I}e^{j\omega t} - \dot{I}^* e^{-j\omega t}}{2j} + L\frac{j\omega\dot{I}e^{j\omega t} - (j\omega\dot{I})^* e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{Ee^{j\omega t} - Ee^{-j\omega t}}{2j} \qquad (90)
$$

両辺に $2j$ をかけ、右辺を左辺へ移項し、E は実数なので $E = E^*$ であることを利用し、因子 $e^{j\omega t}$, $e^{-j\omega t}$ でくくると、次式が得られる。

$$
\left(R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - E\right) e^{j\omega t} - \left(R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - E\right)^* e^{-j\omega t} = 0 \qquad (91)
$$

上式が成立するには

$$
R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = E \qquad (92)
$$

を満たすことが必要である。このように複素共役をとる方法を使っても複素数の回路方程式 (71) (p.13) と同一の式を導出できた。

$i(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ とおく場合は、以下のように変形することで、(86) と同一の形になる。

$$
\begin{aligned}
i(t) &= A\sin\omega t + B\sin\omega t \\
&= A\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + Bj\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2j} \\
&= \frac{(A+jB)e^{j\omega t} - (A-jB)e^{-j\omega t}}{2j} \\
&= \frac{\dot{I}e^{j\omega t} - \dot{I}^{*}e^{-j\omega t}}{2j}
\end{aligned} \tag{93}
$$

ここで $\dot{I} = A + jB$ である。複素数の実部が sin の係数、虚部が cos の係数を表す。

ここでの $\dot{I}$ に対応する時間関数は、$\mathrm{Im}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}$ とおく場合と一致した。

電源電圧が cos のとき

電源電圧が $E\cos\omega t$ のときは、右辺は以下のようになる。

$$
E\cos\omega t = \frac{Ee^{j\omega t} + Ee^{-j\omega t}}{2} \tag{94}
$$

(91) (p.18) に対応する式を導出するには、左辺は以下のようになることが必要である。

$e^{j\omega t}$ の項の符号と $e^{-j\omega t}$ の符号は同じ

それには、以下のようにおく必要がある。

$i(t)$ を振幅と位相で表す場合は

$$
\begin{aligned}
I\cos\omega t &= I\frac{e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}}{2} \\
&= \frac{Ie^{j\theta}e^{j\omega t} + Ie^{-j\theta}e^{j\omega t}}{2} \\
&= \frac{\dot{I}e^{j\omega t} + \dot{I}^{*}e^{j\omega t}}{2}
\end{aligned} \tag{95}
$$

とおく。すなわち複素数 $\dot{I}$ の絶対値と偏角は cos 関数の振幅と位相を表す。

$i(t)$ を sin と cos の和で表す場合は、

$$
\begin{aligned}
A\sin\omega t + B\cos\omega t &= Aj\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j \times j} + B\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\
&= \frac{(B-jA)e^{j\omega t} + (B+jA)e^{-j\omega t}}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \frac{\dot{I}e^{j\omega t} + \dot{I}^* e^{-j\omega t}}{2} \tag{96}$$

とおく。すなわち複素数 $\dot{I}$ の実部は cos の係数、虚部の符号を反転させたものは sin の係数を表す。

「$e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の符号が同じになる定式化」において、$\dot{I}$ に対応する関数は、$\mathrm{Re}\left\{\dot{I}e^{j\omega t}\right\}$ とおく場合と一致した。

「(95)」と「その微分」と「(94) 」を基本式に代入し、両辺に 2 をかけると、次式が得られる。

$$\left(R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - E\right)e^{j\omega t} + \left(R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - E\right)^* e^{-j\omega t} = 0 \tag{97}$$

上式を満たすには、次式を満たすことが必要である。

$$R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = E \tag{98}$$

複素共役を用いる定式化においては、「実領域の正弦関数」を「複素共役を含む複素関数」で表す。導出した方程式の形によって、複素数が表す意味が異なる。(91) と (97) を見比べると、以下のことがわかる。

(1) $e^{j\omega t}$ の項と $e^{-j\omega t}$ の項の符号が異なる式に帰着したとき、$\dot{I} = Ie^{j\theta}$ は $I\sin(\omega t + \theta)$ を表し、$\dot{I} = a + jb$ は $a\sin\omega t + b\cos\omega t$ を表す。

(2) $e^{j\omega t}$ の項と $e^{-j\omega t}$ の項の符号が同じ式に帰着したとき、$\dot{I} = Ie^{j\theta}$ は $I\cos(\omega t + \theta)$ を表し、$\dot{I} = a + jb$ は $a\cos\omega t - b\sin\omega t$ を表す。

いずれの場合においても、

> 複素数の偏角が 0 のとき電源電圧と同位相の正弦波を表す

という性質がある。従って、以下のように複素数を取り扱えば、上記の (1)(2) の違いを気にする必要はない。

> 交流回路を複素記号法で解く場合、電源電圧を正の実数として扱う。得られた複素電流（複素電圧）の偏角が 0 のとき、電源電圧と同位相の正弦波を表す。偏角が正のとき、電源電圧に対して、時間軸において左方向にシフトした波形であり、負のとき時間軸において右方向にシフトした波形である。

補足

電源電圧が sin のときに「$e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の項の符号を同じにする方法」と cos のときに「$e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の項の符号を逆にする方法」は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
E\sin\omega t &= E(-j)\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j\times(-j)} \\
&= \frac{-jEe^{j\omega t}+jEe^{-j\omega t}}{2} \\
&= \frac{-jEe^{j\omega t}+(-jE)^{*}e^{-j\omega t}}{2} \\
E\cos\omega t &= Ej\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2\times j} \\
&= \frac{jEe^{j\omega t}+jEe^{-j\omega t}}{2j} \\
&= \frac{jEe^{j\omega t}-(jE)^{*}e^{-j\omega t}}{2j}
\end{aligned}
$$

「$e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の符号が同じ」とき $-jE$ は $E\sin\omega t$ を表し、「$e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の符号が逆」のとき jE は $E\cos\omega t$ を表す。

5.3 検討

「複素共役を用いる方法」は「虚部をとる方法（あるいは実部をとる方法）」よりも数学的に明解であると思う。しかし、複素共役を用いて説明している教科書はほとんどない。以下の点により敬遠されていると思われる。

- 方程式を導出する過程で、複素共役に関する公式を使用する。複素数に慣れていない学習者にとっては敷居が高い。
- 定式化において $e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ の項の符号が同符号か異符号かによって、複素数に対応する時間関数が異なる、というのは分かりにくい。

6 不適切と思われる数式

以下のような数式を見ることがある。

$$v(t) = j\omega L\, i(t) \tag{99}$$

(99) が成立するには、$v(t)$, $i(t)$ は以下のような複素関数であることが必要である。

$$v(t) = \dot{V}e^{j\omega t} \tag{100}$$

$$i(t) = \dot{I}e^{j\omega t} \tag{101}$$

しかし、現実の電圧や電流は複素量ではなく実数で表される量である。この式は交流電圧や交流電流に関する理解を進める上で、混乱を招くと筆者は考える。$j\omega$ が含まれる数式においては、

$$\dot{V} = j\omega L\dot{I} \tag{102}$$

のように、電圧と電流は複素数として取り扱うべきである。

参考文献

[1] 電気学会, “電気回路論”, オーム社, 1952.

[2] 電気学会, “電気回路論　改訂版”, オーム社, 1970.

[3] 小澤孝夫, “電気回路 I[基礎・交流編]”, 昭晃堂, 1978. （注）2014 年に昭晃堂が解散したため、後継本が朝倉書店より出ている。

[4] 薮哲郎, “世界一わかりやすい電気・電子回路　これ 1 冊で完全マスター！”, 講談社, 2017.