

世界一わかりやすい

電気・電子回路

これ1冊で完全マスター！

おまけ

2022年6月4日

薮 哲郎

本 PDF は書籍「世界一わかりやすい電気・電子回路 これ一冊で完全マスター!」(講談社 2017) を執筆時、ページ数の制約によりカットした部分と、後日加筆したものです。読者への「おまけ」として提供します。ただし、書籍に比べると推敲は十分になされていません。その点をご承知の上、ご活用ください。

この「おまけ」のスタイルは書籍とは異なり、TeX のデフォルトに近いものになっています。「おまけ」に入っている「たぬき」は書籍と同じく河上隆昭氏によるものです。

本 PDF は必要に応じて改訂されます。表紙の日付(コンパイルした日付が自動で入ります)および下記の改訂履歴を見て、バージョンをご確認ください。

改訂履歴

2017.11.17	公開開始
2017.11.18	微修正
2018.3.10	第 2 刷に合わせて修正
2019.12.23	直流成分を付加する部分に加筆
2022.6.4	テブナンの定理の例題 1.13 の別解を加筆 テブナンの定理の例題 3 個目を復活

目次

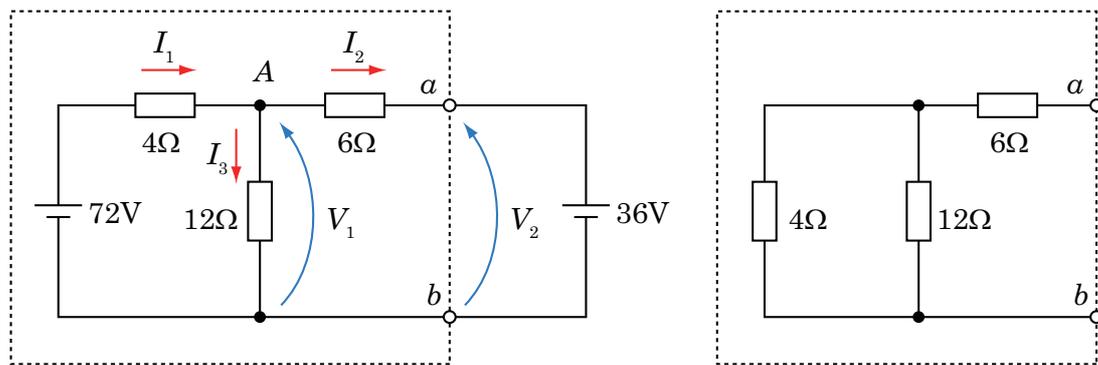
第1章	おまけ	5
1.1	テブナンの定理の例題 1.13 別解 (「p.70 例題 1.13」の末尾に追加) . . .	5
1.2	テブナンの定理の例題 3 個目 (「1.20 テブナンの定理」の末尾に追加) . .	6
1.3	電気回路を解くときのテクニック (「1.20 ブリッジ回路 p.65 (第1刷は 「1.21 ブリッジ回路 p.72」)」の「回路を解くときのテクニック」を独立し た節として分離)	8
1.4	Δ -Y 変換 (「1.24 電力」の手前に配置)	11
第2章	おまけ	15
2.1	ベクトル図の応用例 (「2.12 ベクトル図の応用例の末尾に追加」)	15
2.1.1	2つの周波数を回路に入れ、素子の値を求める	16
2.2	リサージュ図形 (「2章の末尾に配置」)	20
第4章	おまけ	22
4.1	数式の導出 (「4.2 入力インピーダンスと出力インピーダンス」の末尾に 追加)	22
4.2	交流の過渡現象 (「4.4 過渡現象」の末尾に追加)	23
4.3	$E_{DC}/2$ シフトさせる回路の改良版 (「4.5.3 直流成分を遮断する回路」の 手前に追加)	25
第5章	おまけ	29
5.1	高入力インピーダンスの反転増幅回路 (「5.7 加算回路」の手前に配置) . .	29
5.2	三角波発生回路 (「5.12 オペアンプとコンパレータ」の手前に配置) . .	31
第6章	おまけ	34
6.1	全波整流回路 (電源用) (「6.4.2 全波整流回路」の末尾に追加)	34

6.2	全波整流回路（信号処理用）（「6.5.2 オペアンプを用いた整流回路」の末尾に追加）	36
6.3	ツェナーダイオード（定電圧ダイオード）（6章の末尾に配置）	36
第7章	おまけ	39
7.1	スイッチ回路の Tips（「7.4 増幅回路」の手前に配置）	39
7.1.1	還流ダイオード	39
7.2	トランジスタの応用回路（「7.9 電界効果トランジスタ」の手前に配置）	40
7.2.1	ダーリントン接続	40
7.2.2	カレントミラー回路	41
7.3	MOSFET の使用例（7.9.4 の末尾に追加）	46
付録 B	微分方程式の基礎	48
B.1	微分とは	48
B.2	微分に関する公式	51
B.3	物理現象と微分方程式	52
B.4	電気回路で現れる微分方程式	55
付録 C	フーリエ級数展開	57
C.1	フーリエ級数展開とは	57
C.2	フーリエ級数展開の方法	58
C.2.1	正弦波の表現法	60
C.2.2	フーリエ級数展開の例	61

第1章 おまけ

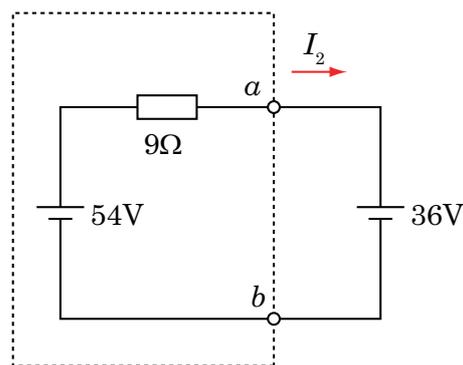
1.1 テブナンの定理の例題 1.13 別解 (「p.70 例題 1.13」の末尾に追加)

p.70 例題 1.13 を解くときに、以下のようにテブナンの定理を適用する方法もある。



(a) テブナンの定理の適用方法

(b) 抵抗の求め方



(c) テブナンの等価回路で置換



図 1.1 テブナンの定理の例題 2 別解

図 1.1(a) に示す回路中の電圧電流を求めるために、図中点線で囲んだ部分をテブナンの等価回路で置き換える。

V_1 は分圧の式より、

$$V_1 = 72 \text{ V} \times \frac{12 \Omega}{4 \Omega + 12 \Omega} = 54 \text{ V} \quad (1.1)$$

である。 6Ω の抵抗に電流は流れないから、 $V_2 = V_1$ である。

端子 $a - b$ から左側を見たときの合成抵抗は、図 1.1 (b) のように考えて、

$$4 \Omega // 12 \Omega + 6 \Omega = \frac{4 \Omega \times 12 \Omega}{4 \Omega + 12 \Omega} + 6 \Omega = 3 \Omega + 6 \Omega = 9 \Omega \quad (1.2)$$

である。従って、図 1.1 (a) の点線で囲んだ部分は同図 (c) の点線で囲んだ部分に置換できる。

$$I_2 = (54 \text{ V} - 36 \text{ V}) \div 9 \Omega = 2 \text{ A} \quad (1.3)$$

である。この I_2 を図 1.1 (a) の I_2 として適用すると、以下のように芋づる式に V_1, I_3, I_1 が求まる。

$$V_1 = 36 \text{ V} + 6 \Omega \times 2 \text{ A} = 48 \text{ V} \quad (1.4)$$

$$I_3 = 48 \text{ V} \div 12 \Omega = 4 \text{ A} \quad (1.5)$$

$$I_1 = (72 \text{ V} - 48 \text{ V}) \div 4 \Omega = 6 \text{ A} \quad (1.6)$$

図 1.1 (a) 中の節点 A において、 $I_1 = I_2 + I_3$ である。上で求めた値を代入すると、

$$6 \text{ A} = 2 \text{ A} + 4 \text{ A} \quad (1.7)$$

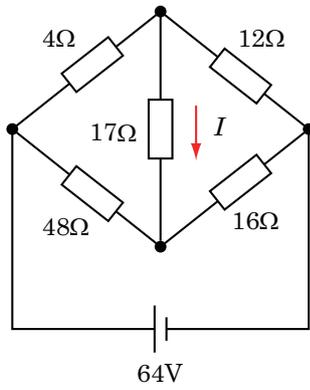
であり、矛盾はない。回路の解が求まっている。

ここで示したテブナンの定理の適用法は、他の教科書では見られないパターンであると思われる。2022/6/3 の授業時に学生からの質問により、このような適用法が存在することを発見した。テブナンの定理を適用する問題の場合、テブナンの等価回路に接続するのは抵抗である。電圧源を接続するという発想は今までなかったと思われる。電圧源を接続することに違和感を感じるかも知れないが、問題なく適用できる。

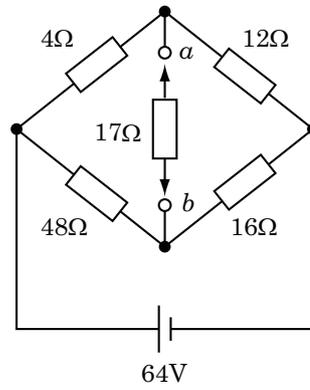
1.2 テブナンの定理の例題3個目（「1.20 テブナンの定理」の末尾に追加）

例題 1.1

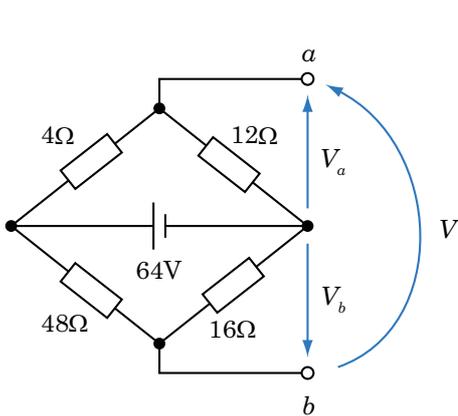
図 1.2(a) 中の電流 I を求めなさい。



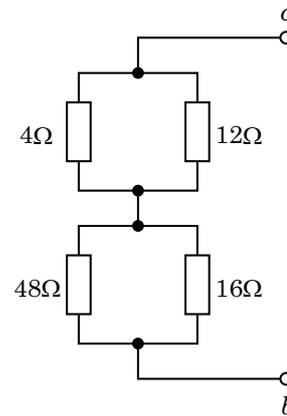
(a) 解きたい回路



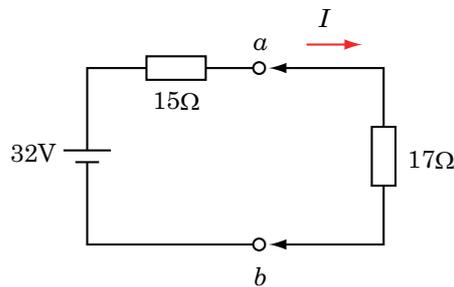
(b) テブナンの定理の適用方法



(c) 少し変形



(d) 抵抗の計算法



(e) テブナンの等価回路

図 1.2 テブナンの定理の例題 3

[解答]

テブナンの等価回路を適用するため、図 1.2(b) のように考える。図 1.2(b) の端子 a, b を外側に描き、電圧源を中央に描くと、図 1.2(c) になる。

電圧 V は以下のように求める。まず、電圧源の $-$ 端子を基準にとって V_a と V_b を求める。分圧の式より

$$V_a = 64\text{V} \times \frac{12\Omega}{4\Omega + 12\Omega} = 48\text{V}$$

$$V_b = 64\text{V} \times \frac{16\Omega}{48\Omega + 16\Omega} = 16\text{V}$$

である。次に、矢印の向きに注意して $V_b + V = V_a$ なので、移項して

$$V = V_a - V_b = 48\text{V} - 16\text{V} = 32\text{V}$$

である。

端子 $a-b$ 間の合成抵抗は、電圧源を短絡すると、図 1.2(d) のように考えることができる。

$$4\Omega // 12\Omega \Rightarrow \frac{4 \times 12}{4 + 12}\Omega = 3\Omega$$

$$16\Omega // 48\Omega \Rightarrow \frac{16 \times 48}{16 + 48}\Omega = 12\Omega$$

より、 $3\Omega + 12\Omega = 15\Omega$ である。従って、テブナンの等価回路は図 1.2(e) のようになる。

電流 I は

$$I = \frac{32\text{V}}{15\Omega + 17\Omega} = 1\text{A}$$

と求まる。

1.3 電気回路を解くときのテクニック (「1.20 ブリッジ回路 p.65 (第1刷は「1.21 ブリッジ回路 p.72」)」の「回路を解くときのテクニック」を独立した節として分離)

本節では電気回路を解くときのテクニックを学ぶ。

同じ電位¹の場所は接続してもよい

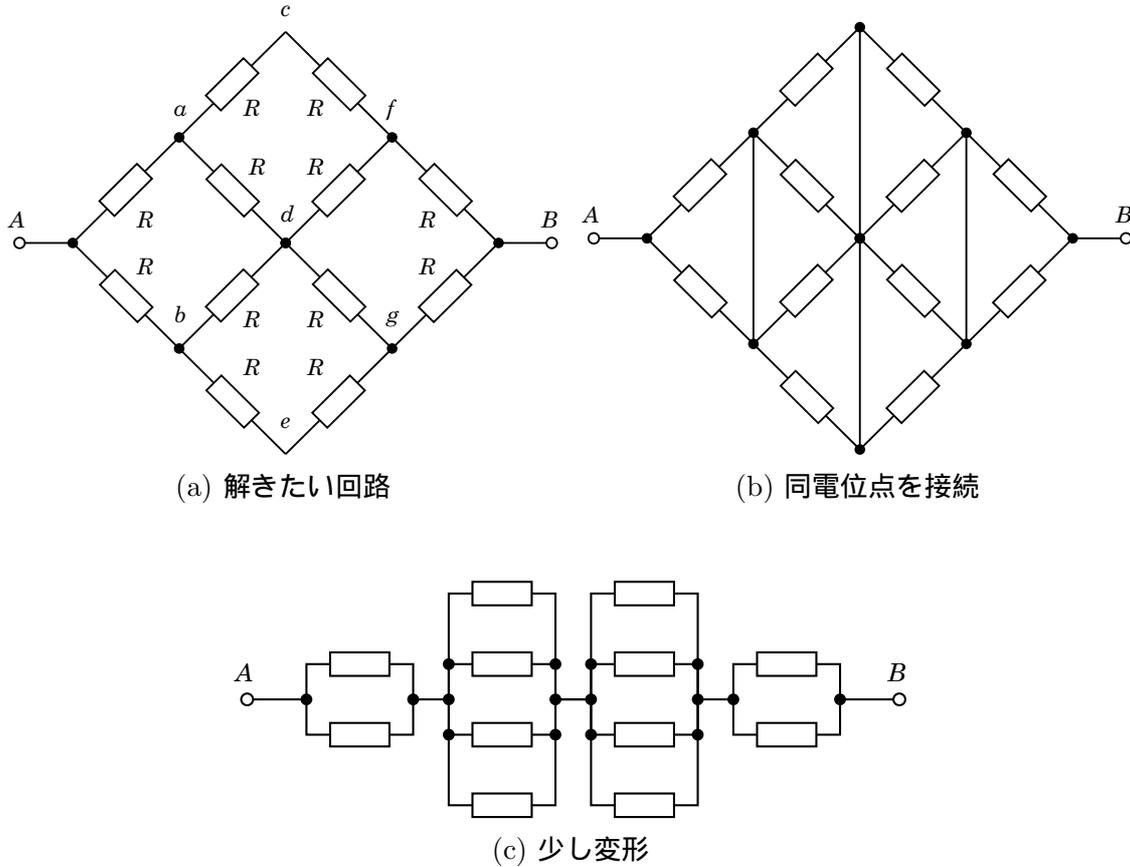


図 1.3 同電位点の接続

図 1.3(a) の合成抵抗を求める。回路が対称なので、 a と b は同じ電位であり、 c, d, e も同電位、 f, g も同電位である。同電位の点は接続してもよい。ゆえに同図 (b) のようになる。これは同図 (c) と等しいので、合成抵抗 R_{all} は

$$R_{all} = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R \quad (1.8)$$

となる。

電流が流れていない場所は切断してもよい

図 1.4(a) の回路の合成抵抗を求める。ブリッジが平衡しているので R_x に電流は流れないので、 \times 印の場所で切断してよい。 R_x は無視できるので、同図 (b) のようになる。

¹電位についてはアースの節(書籍中 p.57)で説明した。「電圧」と「電位」は、ほぼ同義語であるが、ここでは「電位」という用語がピッタリである。

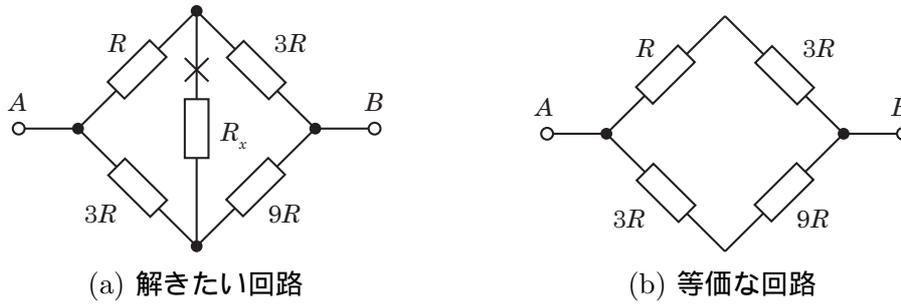


図 1.4 ブリッジの切断

上側の合成抵抗が $4R$ 、下側の合成抵抗が $12R$ で、その並列なので合成抵抗 R_{all} は

$$R_{all} = \frac{4R \cdot 12R}{4R + 12R} = 3R$$

となる。

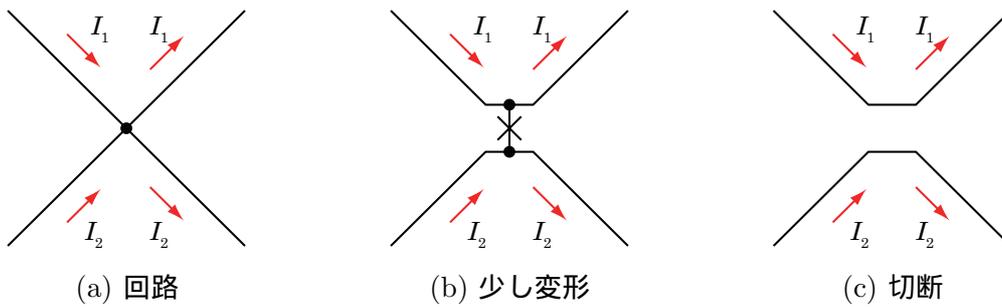


図 1.5 変形して切断

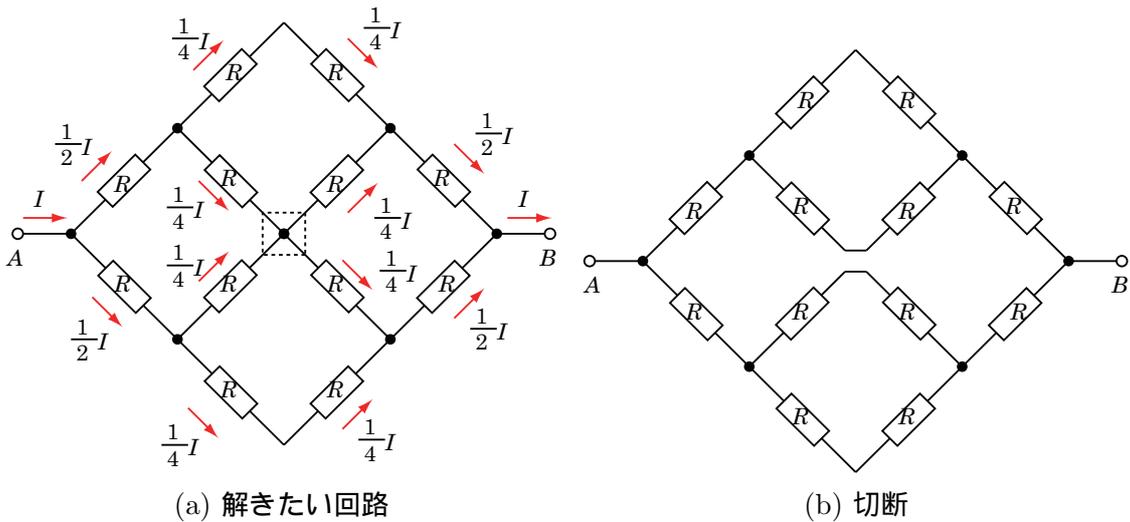


図 1.6 その適用例

図 1.5(a) は同図 (b) のように変形できる。× 印で切断すると同図 (c) のように変形できる。

図 1.6(a) について考える。これは先程解いた図 1.3(a) と同じ回路である。対称なので電流は図中に示すように分岐する。中央の点線で囲んだ部分に対して図 1.5 で示したテクニックを適用すると、図 1.6(b) のようになる。

上半分の合成抵抗は

$$R + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} + R = 3R$$

である。全体の抵抗はその半分であるから $\frac{3}{2}R$ となり、(1.8) (p.9) の結果と一致した。

1.4 Δ -Y変換（「1.24 電力」の手前に配置）

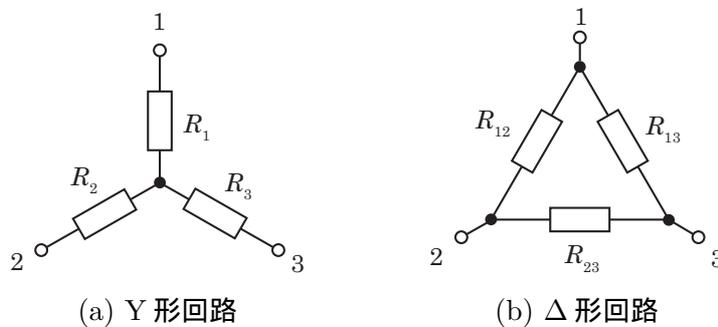


図 1.7 Δ -Y変換

図 1.7(a) と (b) を等価にすることができる。その条件を求める。1-2間の抵抗が図 1.7(a) と (b) で等しいと置くと、

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (1.9)$$

が得られる。2-3間と1-3間も同様に式をたてると、

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{\Delta} \quad (1.10)$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{\Delta} \quad (1.11)$$

が得られる。ただし

$$\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{13} \quad (1.12)$$

である。 $\frac{(1.9) + (1.10) + (1.11)}{2}$ を考えると、

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{12}R_{13} + R_{13}R_{23}}{\Delta} \quad (1.13)$$

が得られる。(1.13) – (1.10) を計算すると次式が得られる。

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{\Delta} \quad (1.14)$$

同様に (1.13) – (1.11), (1.13) – (1.9) を計算すると、

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{\Delta} \quad (1.15)$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{\Delta} \quad (1.16)$$

が得られ、 $\Delta \rightarrow Y$ 変換の式が導出された。

次に $Y \rightarrow \Delta$ の式を導出する。(1.16), (1.14), (1.15) を $\Delta = \square$ の形に変形し、等しいとおくと、以下の式が得られる。

$$\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{13} = \frac{(1.16)}{R_3} = \frac{(1.14)}{R_1} = \frac{(1.15)}{R_2} \quad (1.12)$$

$$\begin{array}{ccc} (a) & (b) & (c) \end{array}$$

まず R_{12} を求める。 R_{23} と R_{13} を消去するために、「 R_{12} と R_{23} が含まれる式」と「 R_{12} と R_{13} が含まれる式」を取り出す。

$$(a) = (b) \text{ より } \frac{\cancel{R_{13}} R_{23}}{R_3} = \frac{R_{12} \cancel{R_{13}}}{R_1} \Rightarrow R_1 R_{23} = R_3 R_{12} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_3}{R_1} R_{12} \quad (1.17)$$

$$(a) = (c) \text{ より } \frac{R_{13} \cancel{R_{23}}}{R_3} = \frac{R_{12} \cancel{R_{23}}}{R_2} \Rightarrow R_2 R_{13} = R_3 R_{12} \Rightarrow R_{13} = \frac{R_3}{R_2} R_{12} \quad (1.18)$$

R_{12} が含まれる (1.14) を変形する。

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{\Delta} \quad (1.14) \text{ と同じ}$$

$$\Delta = R_{12} \frac{1}{R_1} R_{13}$$

$$R_{12} + R_{23} + R_{13} = R_{12} \frac{1}{R_1} R_{13}$$

(1.17)(1.18) を利用して R_{23}, R_{13} を置換

(1.18) を利用して R_{13} を置換

$$R_{12} \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} \right) = R_{12} \frac{1}{R_1} \frac{R_3}{R_2} R_{12} \quad (1.19)$$

$$\cancel{R_{12}} \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{\cancel{R_1 R_2}} = R_{12} \cancel{R_{12}} \frac{R_3}{\cancel{R_1 R_2}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \quad (1.20)$$

ここでは (1.14) を変形したが、(1.15) を用いても (1.19) 以降は同一の式となる。

添字 1, 2, 3 は対等なので、(1.20) に対して添字を $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ と巡回的に置換することで、

$$R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \quad (1.21)$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \quad (1.22)$$

が得られる。

Δ -Y 変換を用いて回路を解きやすい形に変形する例を示す。

図 1.8(a) の V_1 を求めたい。キルヒホッフの法則を用いてループ電流を 3 個設定して連立一次方程式を解くのは厄介である。点線で囲まれた範囲に対して $\Delta \rightarrow Y$ 変換を適用し、同図 (b) のように変形すると抵抗の直列接続と並列接続、分圧の式を用いるだけで解ける。

別の解き方もある。図 1.8(c) の点線で囲まれた範囲に対して $Y \rightarrow \Delta$ 変換を適用し、同図 (d) のように変形しても、抵抗の直列接続と並列接続、分圧の式を用いるだけで解ける。

Δ -Y 変換の用途としては、本書では扱わないが三相交流回路の解析で用いることがある。

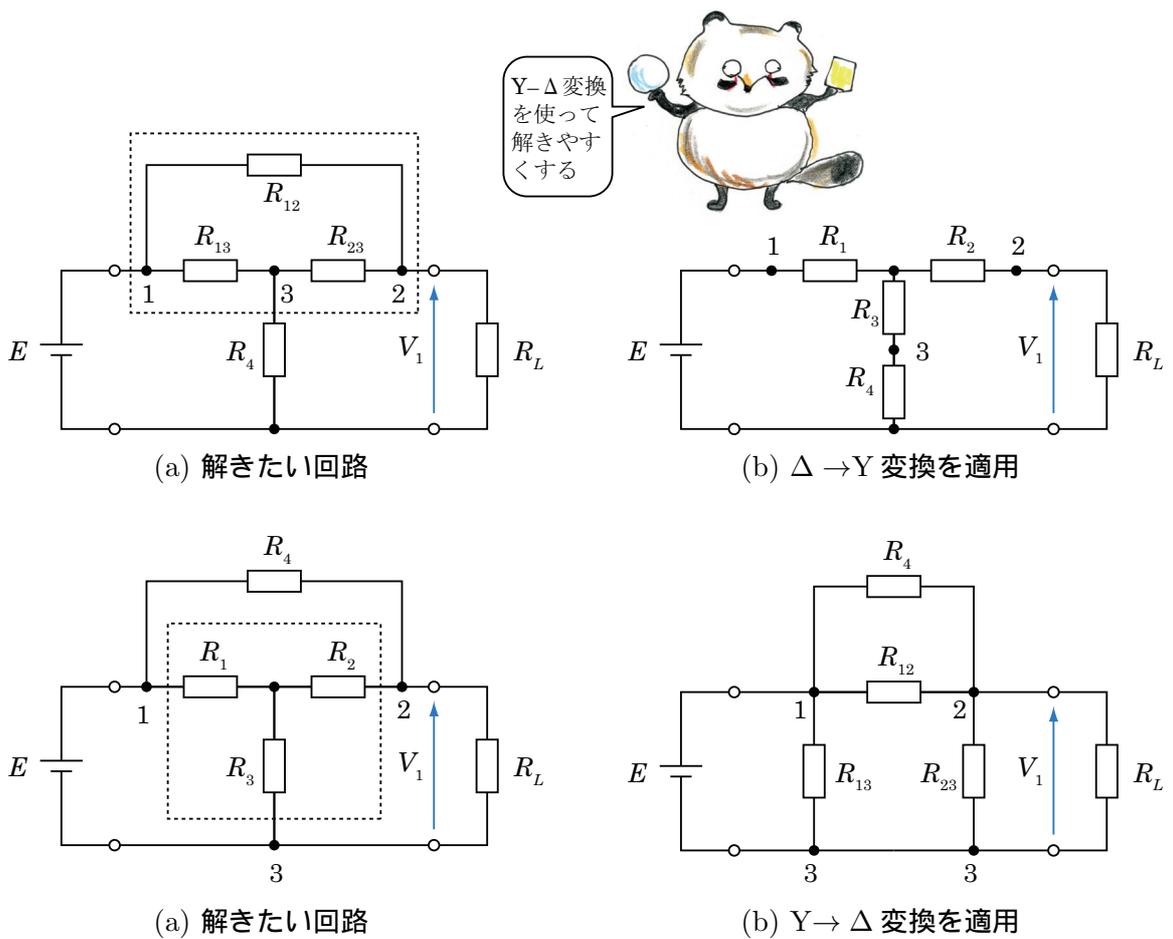


図 1.8 Δ -Y変換の使用例

第2章 おまけ

2.1 ベクトル図の応用例(「2.12 ベクトル図の応用例の末尾に追加」)

RC 直列回路

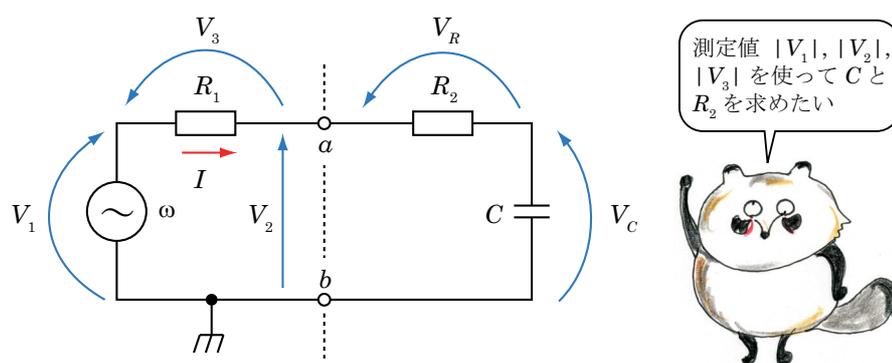


図 2.1 RC 直列回路

図 2.1 の回路について考える。電源の角周波数 ω と R_1 の値は既知であり、端子 $a - b$ より右側が未知である。

$|V_1|, |V_2|, |V_3|$ が測定できたとき¹、 R_2 と C の値を求める問題を考える。

以下の性質に基づいてベクトル図を書くと、図 2.2 のようになる。

- $V_1 = V_2 + V_3$ (ベクトルの和)
- I, V_R, V_3 は同じ方向
- $V_C + V_R = V_2$ (ベクトルの和) かつ I は V_C より 90° 進んでいる

¹電圧計で測定できる量は実効値であり、実数である。実効値については書籍中の第 3 章で説明する。振幅 = 実効値 $\times \sqrt{2}$ の関係がある。この場合、測定値が振幅であっても実効値であっても結果は同じである。

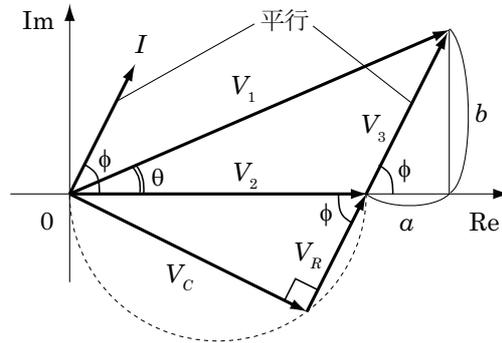


図 2.2 RC 直列回路のベクトル図

θ は余弦定理を使って以下のように求まる²。

$$\theta = \cos^{-1} \frac{|V_1|^2 + |V_2|^2 - |V_3|^2}{2|V_1||V_2|} \quad (2.1)$$

図中の a, b, ϕ は以下のように求まる。

$$a = |V_1| \cos \theta - |V_2| \quad (2.2)$$

$$b = |V_1| \sin \theta \quad (2.3)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (2.4)$$

$|I|, |V_R|, |V_C|$ が以下のように求まる。

$$|I| = \frac{|V_3|}{R_1} \quad (2.5)$$

$$|V_R| = |V_2| \cos \phi$$

$$|V_C| = |V_2| \sin \phi$$

最後に、 R_2, C が以下のように求まる。

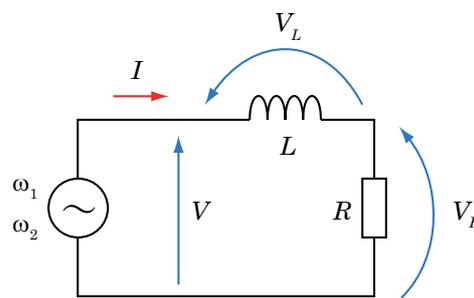
$$R_2 = \frac{|V_R|}{|I|}$$

$$C = \frac{|I|}{\omega |V_C|}$$

2.1.1 2つの周波数を回路に入れ、素子の値を求める

RL 直列回路

²オシロスコープを使って V_1 と V_2 の波形を測定する場合、測定した波形から V_1 と V_2 の位相差 θ を求めることができる。この場合 V_3 を測定する必要はない。 V_3 は a, b を求めた後、 $V_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$ で得られる。



測定値 V と I から
 L と R を求めたい。
2つの周波数を使う



図 2.3 RL 直列回路

図 2.3 において、測定した V と I の値から L と R の値を求める問題を考える。ただし、電源の角周波数は ω_1, ω_2 の 2 通りに設定できることを仮定する。

角周波数を ω_1 に設定したときの測定値を V_1, I_1 とし、 ω_2 に設定したときの測定値を V_2, I_2 とする。電圧計や電流計で得られる測定値は振幅 (複素電圧・複素電流の絶対値) であることを仮定する³。ゆえに V_1, V_2, I_1, I_2 は実数である。

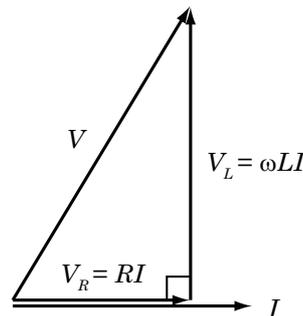


図 2.4 RL 直列回路のベクトル図

V_R, V_L, V, I の関係は既に書籍中の図 2.28 (p.121) で示した。 I を横向きにして書くと、図 2.4 になる。図より

$$V_R^2 + V_L^2 = V^2 \quad (2.6)$$

である。以下の式が得られる。

$$(RI_1)^2 + (\omega_1 LI_1)^2 = V_1^2$$

$$(RI_2)^2 + (\omega_2 LI_2)^2 = V_2^2$$

³実際の電圧計や電流計が示す値は実効値であり、振幅ではない。実効値については書籍中の第3章で説明する。振幅 = 実効値 $\times \sqrt{2}$ の関係がある。この場合、測定値が振幅であっても実効値であっても結果は同じである。

両辺をそれぞれ I_1^2, I_2^2 で割ると

$$R^2 + \omega_1^2 L^2 = \left(\frac{V_1}{I_1}\right)^2 \quad (2.7)$$

$$R^2 + \omega_2^2 L^2 = \left(\frac{V_2}{I_2}\right)^2 \quad (2.8)$$

が得られる。(2.7) - (2.8) より

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega_2^2) L^2 &= \left(\frac{V_1}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{I_2}\right)^2 \\ L &= \sqrt{\frac{\left(\frac{V_1}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{I_2}\right)^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

で L が得られる。次に (2.7) あるいは (2.8) を利用すると R が得られる。例えば (2.7) を利用すると

$$R = \sqrt{\left(\frac{V_1}{I_1}\right)^2 - \omega_1^2 L^2} \quad (2.10)$$

である。

RL 並列回路

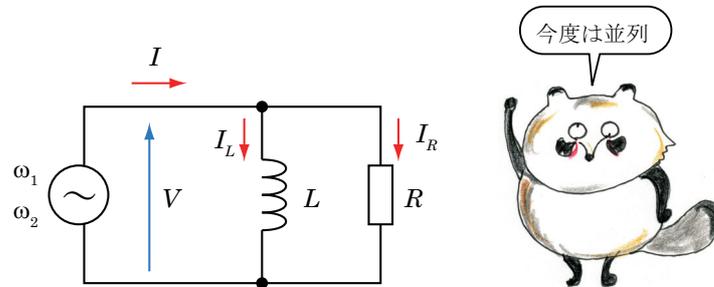
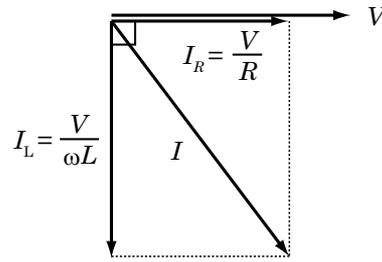


図 2.5 RL 並列回路

図 2.5 において、 L と R の値を求める問題を考える。角周波数を ω_1 に設定したときの測定値を V_1, I_1 とし、 ω_2 に設定したときの測定値を V_2, I_2 とする。

V, I, I_R, I_L の関係を図 2.6 に示す。図より

$$I_R^2 + I_L^2 = I^2 \quad (2.11)$$

図 2.6 RL 並列回路のベクトル図

である。以下の式が得られる。

$$\left(\frac{V_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_1}{\omega_1 L}\right)^2 = I_1^2$$

$$\left(\frac{V_2}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{\omega_2 L}\right)^2 = I_2^2$$

両辺をそれぞれ V_1^2, V_2^2 で割ると

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega_1^2 L^2} = \left(\frac{I_1}{V_1}\right)^2 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega_2^2 L^2} = \left(\frac{I_2}{V_2}\right)^2 \quad (2.13)$$

が得られる。(2.12) - (2.13) より

$$\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \frac{1}{L^2} = \left(\frac{I_1}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{I_2}{V_2}\right)^2$$

$$L = \sqrt{\frac{\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}}{\left(\frac{I_1}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{I_2}{V_2}\right)^2}} \quad (2.14)$$

で L が得られる。次に、これを (2.12) あるいは (2.13) に代入すると R が得られる。例えば、(2.12) を R について解くと

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{I_1}{V_1}\right)^2 - \frac{1}{\omega_1^2 L^2}}} \quad (2.15)$$

である。

2.2 リサージュ図形（「2章の末尾に配置」）

オシロスコープは電圧を測定する測定器であり、電気回路において最も重要な測定器具である。通常は横軸を時間、縦軸を電圧としたグラフを描くが、リサージュ図形⁴⁵を描く機能も持っている。

リサージュ図形は2つの交流電圧を入力とし、横軸に1つめの入力電圧、縦軸にもう1つの入力電圧をとることで描く。2つの交流電圧の位相関係を測定するのに用いる。

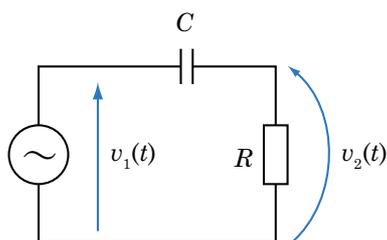


図 2.7 サンプル回路

図 2.7 の回路において、横軸を $v_1(t)$ 、縦軸を $v_2(t)$ としてリサージュ図形を描く。オシロスコープで測定する場合、各チャンネルのアースを共通にする必要があるので、 v_1 と v_2 の矢印の根元は共通の場所である。

例として、 $v_1(t)$ の振幅が $\sqrt{2}V$ 、 $v_2(t)$ の振幅が $1V$ 、 $v_2(t)$ の位相が $v_1(t)$ より 45° 進んでいる場合、 v_1 と v_2 は以下の式で表され、リサージュ図形は図 2.8 になる。

$$v_1(t) = \sqrt{2} \cos \omega t \quad (2.16)$$

$$v_2(t) = \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.17)$$

次に、入力する 2 つの電圧がそれぞれ次式で表される場合を考える。

$$v_1(t) = 2 \cos \omega t \quad (2.18)$$

$$v_2(t) = 2 \cos (\omega t + \theta) \quad (2.19)$$

v_1 と v_2 はどちらも振幅は 2 であり、位相差は θ である。 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ の場合のリサージュ図形を図 2.9(a) ~ (e) に示す。ただし横軸が v_1 、縦軸が v_2 である。位相が 0° のとき /、 180° のとき \ という線状になり、位相が 90° ずれているとき円になる。

⁴リサージュ図形と表記されることもある。

⁵カセットデッキの調整は、標準信号が録音されたテープを再生して、左チャンネルと右チャンネルの位相が揃うように、リサージュ図形をオシロで描いて、ヘッドのアジマス进行调整した。今はリサージュ図形は何に使うのだろうか？

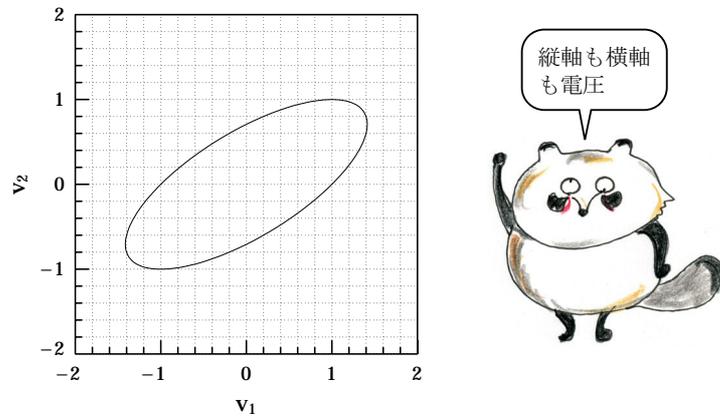


図 2.8 v_1 の振幅が $\sqrt{2}V$, v_2 の振幅が $1V$, 位相差が 45° のときのリサージュ図形

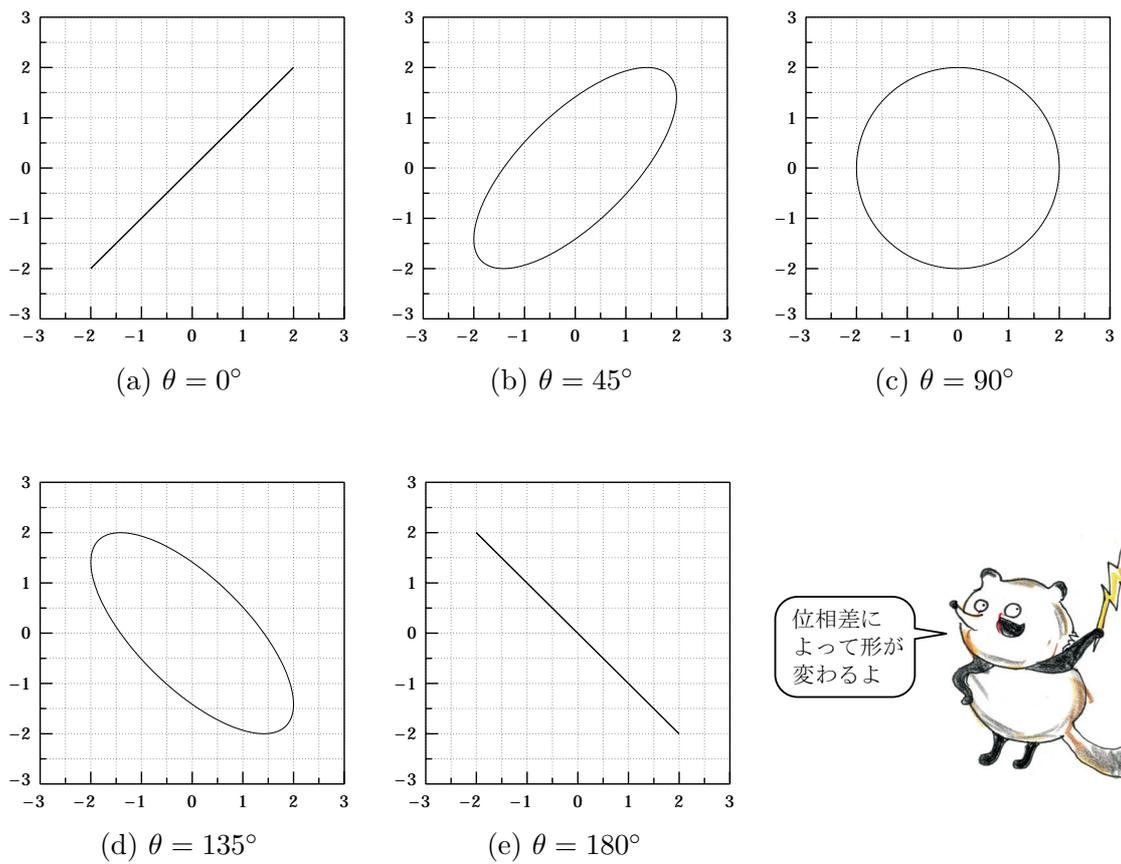
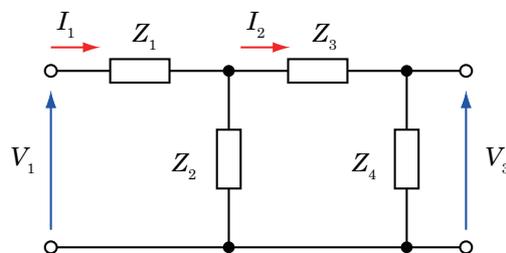


図 2.9 θ を変化させたときのリサージュ図形

第4章 おまけ

4.1 数式の導出（「4.2 入力インピーダンスと出力インピーダンス」の末尾に追加）



$Z_1 \sim Z_4$ は何らかの
インピーダンス
 R or $j\omega L$ or $1/j\omega C$



図 4.1 周波数特性の求め方

グラフ中の 3. 4. の曲線は以下のようにして計算した。図 4.1 について考える。全体のインピーダンスを Z とすると、

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 // (Z_3 + Z_4) \\ &= Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \\ &= \frac{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \end{aligned}$$

なので、 I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{Z} \\ &= \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)} V_1 \end{aligned}$$

となる。 I_2 は分流の式を用いて、

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I_1 \\ &= \frac{Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)} V_1 \end{aligned}$$

となる。 $V_3 = Z_4 I_2$ より

$$V_3 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)} V_1$$

となる。 $Z_1 \leftarrow R_1$, $Z_2 \leftarrow \frac{1}{j\omega C_1}$, $Z_3 \leftarrow R_2$, $Z_4 \leftarrow \frac{1}{j\omega C_2}$ を代入すると、

$$V_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \frac{1}{j\omega C_1} \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}$$

分子と分母に $j\omega C_1 \cdot j\omega C_2$ をかける

$$= \frac{1}{j\omega C_1 R_1 + j\omega C_2 R_1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega C_2 R_2 + 1}$$

$C_1 R_1 = C_2 R_2 = K$, $C_2 = C_1 L$ と置いた

$$= \frac{1}{1 - \omega^2 K^2 + j(2\omega K + \omega K L)} \quad (4.1)$$

となる。 $k = 2000\pi$, $L = 1$ あるいは $\frac{1}{10}$ とおいて (4.1) を ω の関数として計算することで、書籍中の図 4.18 中の 3. と 4. の曲線を得た。

4.2 交流の過渡現象 (「4.4 過渡現象」の末尾に追加)

交流の過渡現象

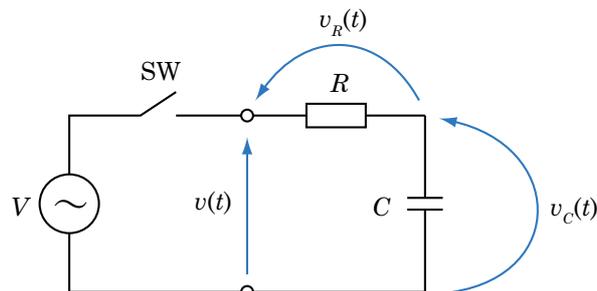


図 4.2 交流の過渡現象

図 4.2 は RC 直列回路に交流電源を接続したケースである。初期状態でコンデンサに電荷はないことを仮定する。 $t = 0$ でスイッチを on にすると、 $v_C(t)$ と $v_R(t)$ がどのような形になるか考える。

振幅を表す複素電圧を V とするとき、 $v(t)$ は以下の式で表される。

$$v(t) = \operatorname{Re} \{ V e^{j\omega t} \}$$

回路全体の微分方程式は直流の RC 充電回路の式 (書籍中の p.187 (4.29)) と同様の手順により、以下のようになる。

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = \operatorname{Re} \{ V e^{j\omega t} \} \quad (4.2)$$

過渡解は (4.2) の右辺を 0 と置いたときの解だから、直流のときと同じである。過渡解を v_{Ct} で表すと

$$v_{Ct}(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (4.3)$$

となる。 A は任意定数であり、初期条件を用いて、後で求める。

定常解は、複素記号法を用いて複素電圧を求め、それに $e^{j\omega t}$ をかけて実部をとればよい。コンデンサにかかる複素電圧 V_C は、分圧の式により

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V \\ &= \frac{V}{1 + j\omega CR} \end{aligned}$$

だから、その時間表現を v_{Cs} とすると、

$$v_{Cs}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} \right\} \quad (4.4)$$

である。

解は過渡解 (4.3) と定常解 (4.4) の和であるから、

$$v_C(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{V}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} \right\} \quad (4.5)$$

となる。係数 A は初期条件「 $t = 0$ のとき $v_C = 0$ 」を利用して求める。この条件を (4.5) に代入すると、以下のようになる。本項では $t = 0$ における交流電圧の位相が様々な場合

について考えるので、 $V = Ee^{j\theta}$ とおく。 E は振幅を表す正の実数である。

$$\begin{aligned}
 A &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{Ee^{j\theta}}{1 + j\omega CR} \right\} \\
 &\quad \text{分母を極座標形式で表し} \\
 &\quad \text{1 + j}\omega CR \text{ の偏角を } \phi \text{ とおく} \\
 &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{Ee^{j\theta}}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2} e^{j\phi}} \right\} \\
 &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} e^{j(\theta - \phi)} \right\} \\
 &= -\frac{E}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \cos(\theta - \phi) \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

ϕ は図 4.3 より、

$$\phi = \tan^{-1} \omega CR$$

である。

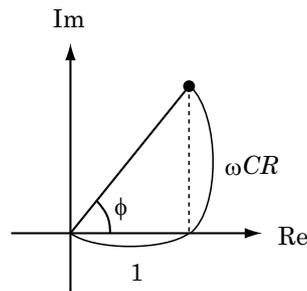


図 4.3 $1 + j\omega CR$ の値

\cos 関数は引数が 0 のときに最大値 1 をとり、 $\pm 90^\circ$ のときに最小値 0 をとるので、 V の偏角 θ と $1 + j\omega CR$ の偏角 ϕ が一致したときに過渡項の振幅 A は最大になり、 90° ずれているときに過渡項の振幅 A はゼロになる。

$\frac{1}{\omega C} : R = 1 : 1$ のときと $\frac{1}{\omega C} : R = 1 : 5$ のときについて、過渡項が最大になる場合の波形を図 4.4 に示す。図中には過渡項を無視した場合の v_C の波形 (定常解) も併せて記入した。 T は回路に加える正弦波の周期を表す。

4.3 $E_{DC}/2$ シフトさせる回路の改良版 (「4.5.3 直流成分を遮断する回路」の手前に追加)

書籍中図 4.3(a) (p.201) の回路は、原理的にはこれでよいが、電源電圧が変動すると、付加する直流成分も変動するという問題がある。

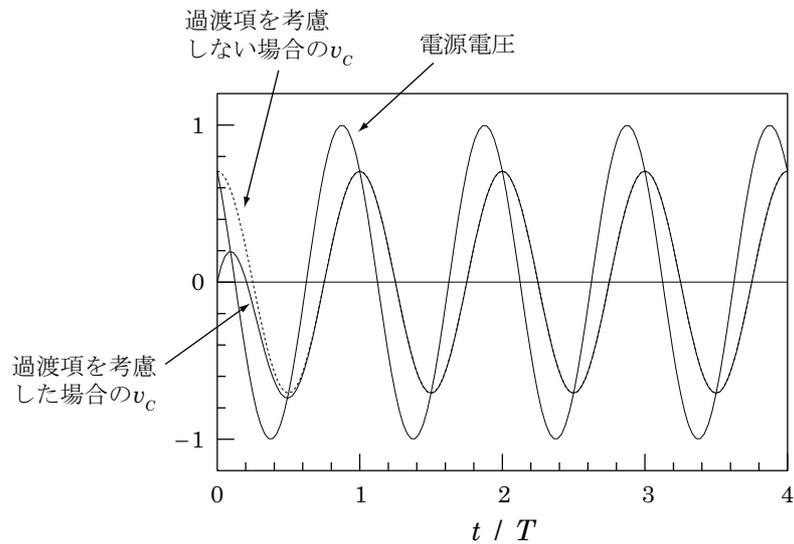
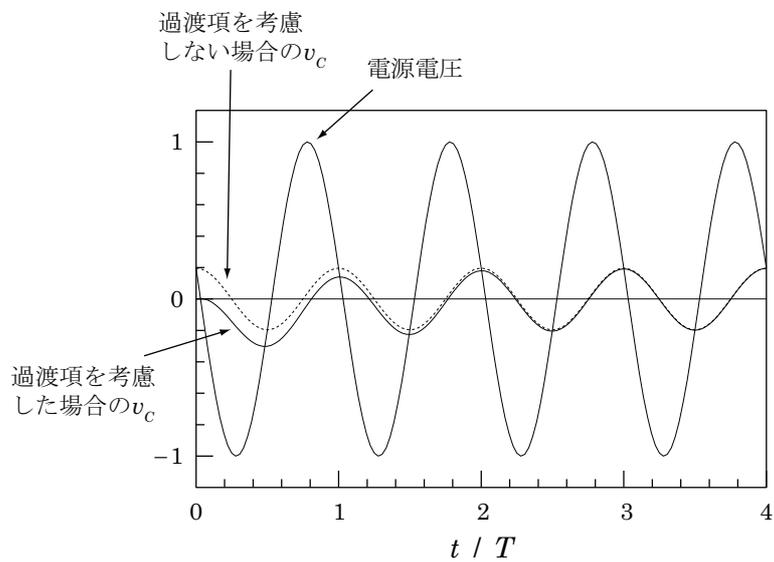
(a) $\frac{1}{\omega C} : R = 1 : 1$ のとき(b) $\frac{1}{\omega C} : R = 1 : 5$ のとき

図 4.4 交流の過渡現象のグラフ

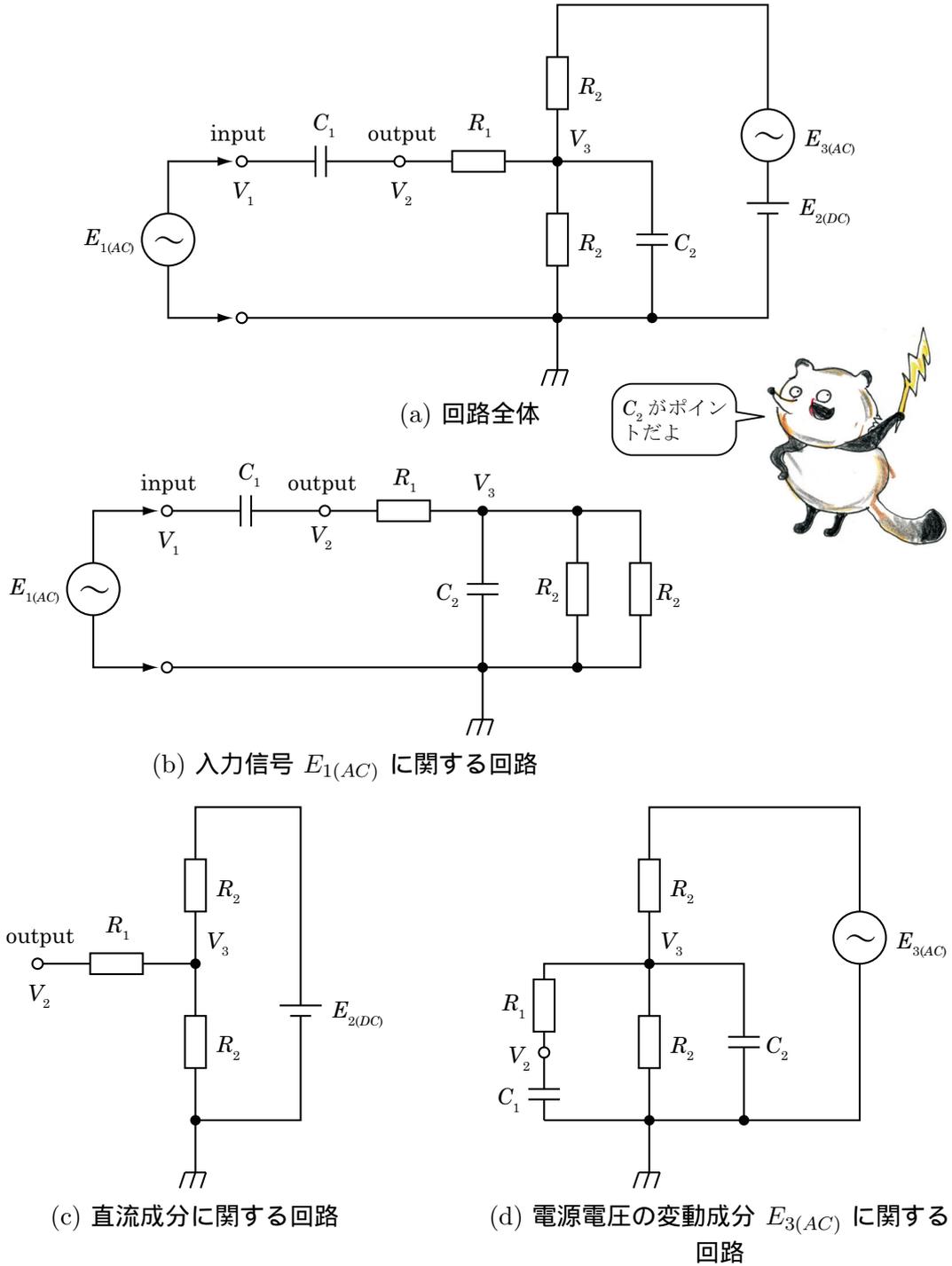


図 4.5 $\frac{E_{DC}}{2}$ シフトさせる回路の改良版

この問題を解決した回路が図 4.5(a) である。重ねあわせの理を用いて、この回路の性質を考察する。入力信号 $E_{1(AC)}$ に関する部分が同図 (b) である。

$$\frac{1}{j\omega C_1} \simeq 0$$

$$\frac{1}{j\omega C_2} \simeq 0$$

を仮定すると、

$$V_3 \simeq 0$$

$$V_2 \simeq E_{1(AC)} \quad (4.7)$$

となり、出力端子 V_2 に入力信号はそのまま出てくる。

直流成分に関する回路は同図 (c) である。分圧するので、

$$V_3 = \frac{E_{2(DC)}}{2}$$

である。 R_1 に電流は流れないので、 R_1 における電圧降下はない。ゆえに、

$$V_2 = V_3 = \frac{E_{2(DC)}}{2} \quad (4.8)$$

であり、直流電源 $E_{2(DC)}$ の半分の電圧が出力端子 V_2 に現れる。

電源電圧の変動成分 $E_{3(AC)}$ に関する回路が同図 (d) である。

$$\frac{1}{j\omega C_2} \simeq 0$$

を仮定すると、

$$V_3 \simeq 0 \quad (4.9)$$

である。 V_3 を R_1 と $\frac{1}{j\omega C_1}$ で分圧して得られる値が V_2 だから、

$$V_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_3$$

であり、(4.9) より

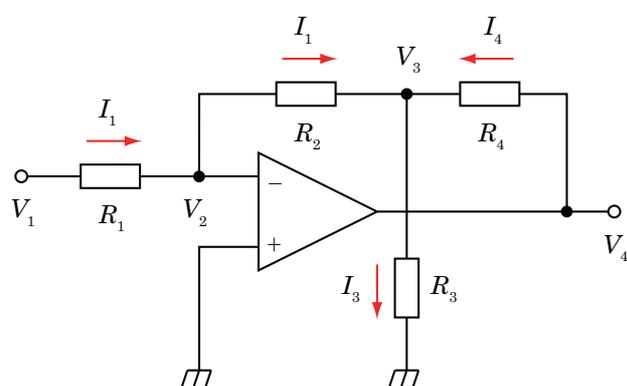
$$V_2 \simeq 0 \quad (4.10)$$

である。出力電圧 V_2 は電源電圧の変動の影響を受けない。

(4.7)(4.8)(4.10) より、出力端子 V_2 は入力信号 $E_{1(AC)}$ を $\frac{E_{1(AC)}}{2}$ シフトさせた電圧であり、電源電圧の変動 $E_{3(AC)}$ の影響を受けない。

第5章 おまけ

5.1 高入力インピーダンスの反転増幅回路（「5.7 加算回路」の手に前に配置）



V_1 と V_3 の関係は反転増幅回路。

V_4 と V_3 の関係は分圧。そうなるには $I_1 \ll I_3 \doteq I_4$



図 5.1 高入力インピーダンスの反転増幅回路

反転増幅器の入力インピーダンスを高くする方法として図 5.1 の回路構成法がある¹。バーチャルショートが成立するので

$$V_2 = 0 \quad (5.1)$$

であり、この回路の入力インピーダンスは R_1 である。

この回路は次のように考える。

1. V_1 と V_3 の関係は、反転増幅器における入力と出力の関係と同じである。
2. 出力 V_4 を R_3 と R_4 で分圧したときに R_3 にかかる電圧が V_3 である。

¹この回路はいくつかの教科書に載っているが、実用に使われているのを見たことがない。バッファと普通の反転増幅回路を縦続接続すると、この回路と同等の機能を「オペアンプ 2 個, 抵抗 2 個」で実現できる。この回路は「オペアンプ 1 個, 抵抗 4 個」である。オペアンプが高価な時代はこの回路の方が有利だったかもしれないが、オペアンプの価格が安い今は、「バッファ + 反転増幅回路」の方が利用しやすいのかもしれない。

1. は常に成立する。2. が成立するには

$$I_1 \ll I_3 \simeq I_4 \quad (5.2)$$

が必要である。そのために、

$$R_1, R_2 \gg R_3, R_4 \quad (5.3)$$

のように設定する。\$R_1\$ は大きいので入力インピーダンスは高い。

入出力関係を導出する。\$V_1\$ と \$V_3\$ の関係は、反転増幅器における入力と出力の関係と同じである。次式が成立する。

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_3}{R_2} \quad (5.4)$$

(5.1) より \$V_2 = 0\$ を代入し、\$V_3 = \square\$ の形に変形すると、

$$V_3 = -\frac{R_2}{R_1}V_1 \quad (5.5)$$

が得られる。\$V_3\$ が求まったなら、以下のように \$I_3\$ が求まる。

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = -\frac{R_2}{R_1 R_3}V_1 \quad (5.6)$$

\$I_1 + I_4 = I_3\$ だから、

$$\begin{aligned} I_4 &= I_3 - I_1 \\ &= -\left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_1}\right)V_1 \quad (5.6) \text{ と } (5.4) \text{ を利用} \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。\$V_4 = V_3 + R_4 I_4\$ に (5.5) と (5.7) を代入して

$$\begin{aligned} V_4 &= -\frac{R_2}{R_1}V_1 - R_4 \left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_1}\right)V_1 \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_2}\right)V_1 \\ &\quad \frac{R_4}{R_2} \text{ は他の項と比べて小さいことを仮定する (*)} \\ &\simeq -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)V_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

はじめにおいた仮定 2. が成立するには (5.2) が必要であった。(5.2) を満たすには (*) が必要である。

\$R_1, R_2\$ は大きい値に、\$R_3, R_4\$ は小さい値に設定する。たとえば、\$R_1 = 200 \text{ k}\Omega\$, \$R_2 = 200 \text{ k}\Omega\$, \$R_3 = 1 \text{ k}\Omega\$, \$R_4 = 9 \text{ k}\Omega\$ に設定すると 10 倍の増幅器となる。この例では \$R_1 = R_2\$ とし、\$R_3\$ と \$R_4\$ の比率で増幅率を決めた。

5.2 三角波発生回路（「5.12 オペアンプとコンパレータ」の手前に配置）

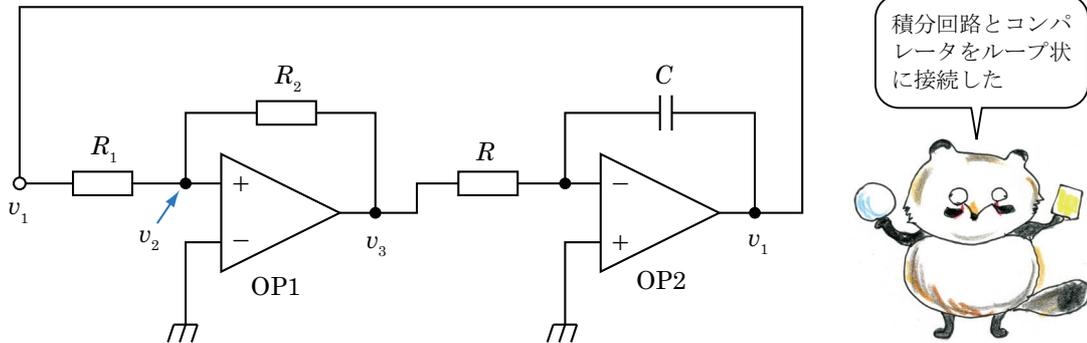


図 5.2 三角波発生回路

書籍中の「図 5.24 (p. 231) の積分回路と図 5.37(a) (p. 243) のヒステリシス付きコンパレータ」をループ状に接続すると、図 5.2 の三角波発生回路が得られる。

動作原理について説明する。コンパレータ OP1 の出力 v_3 が high のときの出力電圧を V_S , low のときの出力電圧を $-V_S$ とする。 V_L と V_H を次式で定義すると、コンパレータ OP1 の入力電圧 v_1 が V_H を上回ったときと、 V_L を下回ったときに、ヒステリシス付きコンパレータの出力が切り替わる。

$$V_L = -\frac{R_1}{R_2}V_S \quad (5.9)$$

$$V_H = \frac{R_1}{R_2}V_S \quad (5.10)$$

$t = 0$ でコンパレータ OP1 の出力が low であると仮定する。積分回路であるオペアンプ OP2 の出力 v_1 は書籍中の (5.29) (書籍中 p.231) より、

$$v_1 = -\frac{1}{RC} \int -V_S dt$$

である。 $t = 0$ で $v_1 = 0$ (C に電荷はたまっていない) を仮定すると、

$$v_1 = \frac{V_S}{RC}t$$

となる。 v_1 は傾き $\frac{V_S}{RC}$ で直線的に増加する。この様子を図 5.3 の区間 A で表す。

次に、 v_1 が V_H を上回ると、 $v_2 > 0$ となり、コンパレータ OP1 の出力が high に切り替わる。今度はオペアンプ OP2 の出力は、傾き $-\frac{V_S}{RC}$ で直線的に減少する。この様子を

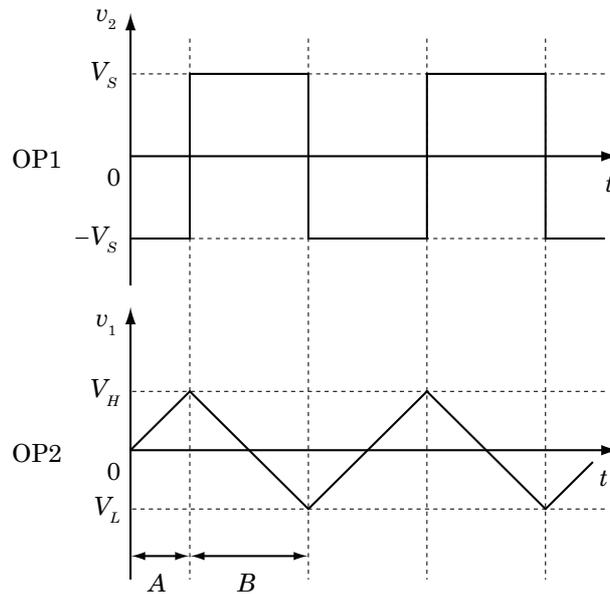


図 5.3 三角波発生回路の波形

図 5.3 の区間 B で表す。以後、これを繰り返すので、コンパレータ OP1 の出力は方形波、オペアンプ OP2 の出力は三角波となる。

周期を求める。区間 B に着目すると、オペアンプ OP2 の電圧の変化幅は

$$V_H - V_L = 2 \frac{R_1}{R_2} V_S$$

傾きの絶対値は

$$\frac{V_S}{RC}$$

であるから、区間 B の長さは

$$2 \frac{R_1}{R_2} V_S \div \frac{V_S}{RC} = \frac{2R_1 RC}{R_2}$$

である。三角波の周期 T はその 2 倍であるから、

$$T = \frac{4R_1 RC}{R_2}$$

である。

書籍中の 5.9 節（積分回路）の説明で、積分回路が飽和せずに動作するためには、書籍中の図 5.27（書籍中 p.234）のように、コンデンサと並列に抵抗を接続して、直流を通す負帰還の経路を確保する必要があると述べた。図 5.2（p.31）の三角波発生回路では、オペアンプ OP2 の出力をオペアンプ OP1 の入力とすることで、負帰還の経路が形成されており、

この経路は直流を通す。ゆえに、本節の三角波発生回路においては、積分回路のコンデンサに並列に抵抗を入れる必要はない。

第6章 おまけ

6.1 全波整流回路(電源用)(「6.4.2 全波整流回路」の末尾に追加)

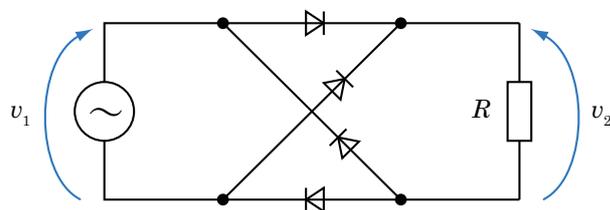


図 6.1 全波整流回路の別の表現

見かけは異なるが、書籍中の図 6.10(a) と同一の回路だよ



全波整流回路の回路図は図 6.1 のように描かれることもある。見かけの形は異なるが、書籍中の図 6.10(a) と同一の回路である。

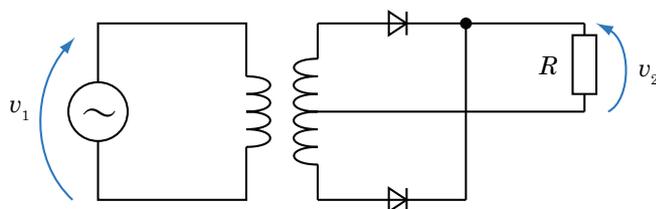


図 6.2 全波整流回路 2

ダイオードを 1 個しか通過しないので、電圧降下が少ないよ



全波整流回路としては図 6.2 に示す構成もある。センタータップ付きのトランスが必要であり、トランスの 2 次側の巻数は 2 倍になるが、ダイオードの個数は 2 個になる。通過するダイオードが 1 個なので、ダイオードおける消費電力はブリッジ整流回路の半分になる。

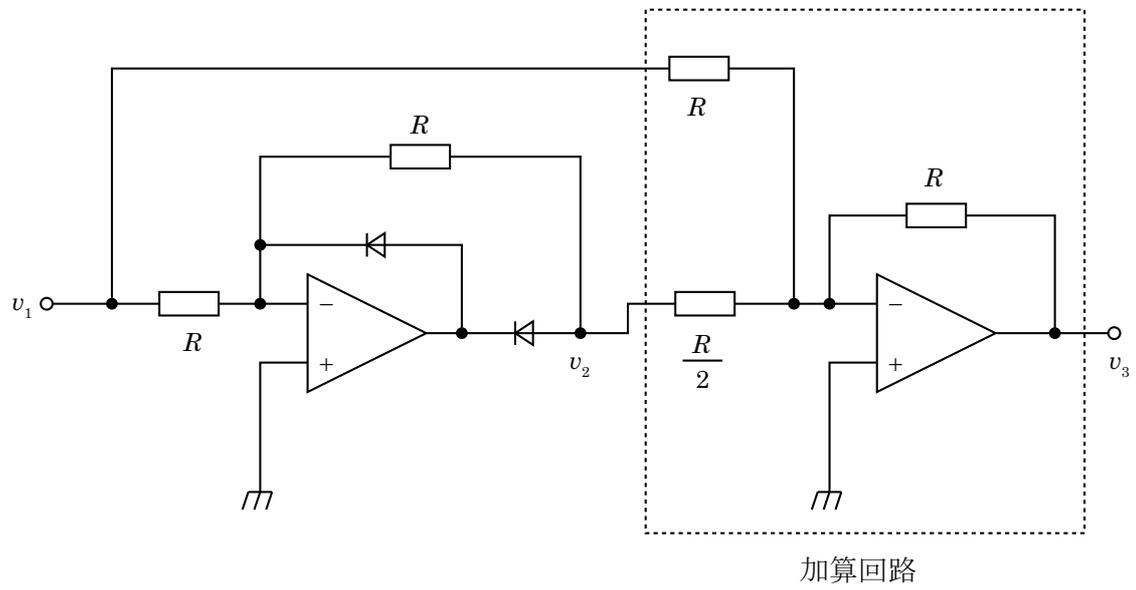


図 6.3 オペアンプを使った全波整流回路

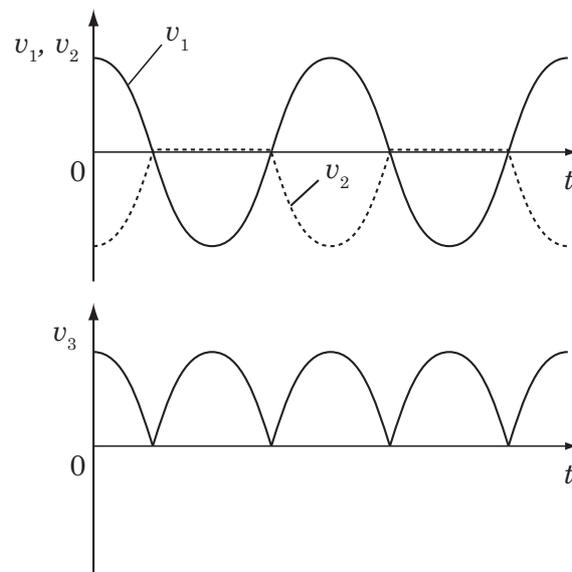


図 6.4 オペアンプを使った全波整流回路の波形

6.2 全波整流回路 (信号処理用) (「6.5.2 オペアンプを用いた整流回路」の末尾に追加)

「書籍中の図 6.16(c) (p.277) の反転形の半波整流回路の出力を 2 倍したものと「入力」を加算すると、全波整流回路を実現することができる。加算回路として反転形の加算回路を使用した回路を図 6.3 に示す。入出力波形は図 6.4 のようになる。

6.3 ツェナーダイオード (定電圧ダイオード) (6章の末尾に配置)

通常のダイオードは逆方向に電圧をかけてもほとんど電流は流れないが、半導体に混ぜる不純物の量を多くすると、逆方向にかかる電圧がツェナー電圧 V_Z を超えたときに、急激に電流が流れる。この現象を降伏という。このような特性を持つダイオードをツェナーダイオード (zener diode)¹ あるいは定電圧ダイオードという。

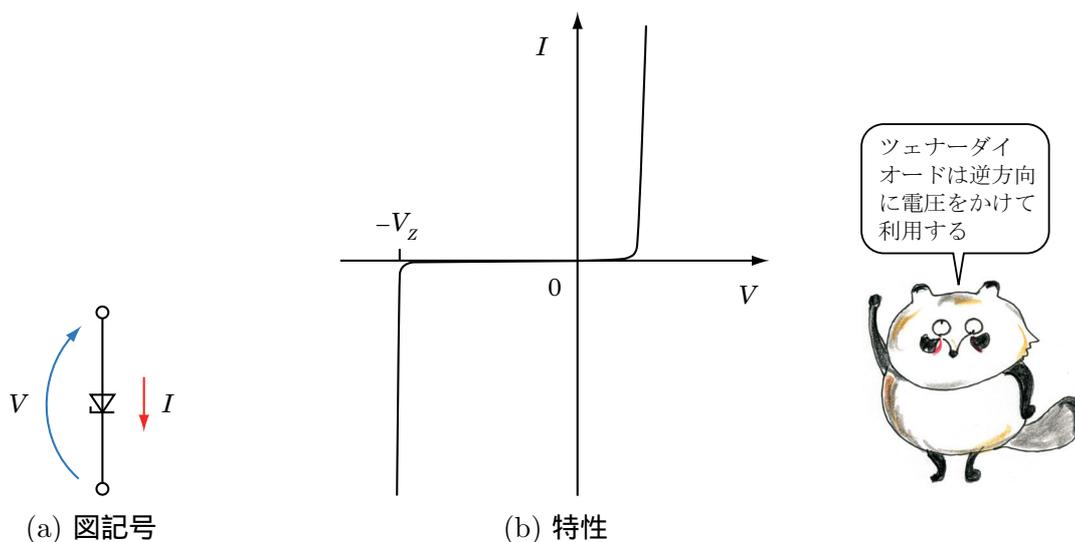


図 6.5 ツェナーダイオード

ツェナーダイオードの図記号を 6.5(a) に示し、その電圧電流特性を同図 (b) に示す。ツェナー電圧 V_Z の値は $2\text{V} \sim 50\text{V}$ 程度であり、様々なツェナー電圧を持ったツェナーダイオードが製造されている。

ツェナーダイオードは逆方向に電圧をかけて使用する。定電圧を得るための回路を図 6.6(a) に示す。 $E > V_Z$ を仮定する。図 6.5(b) で示したように、逆方向にかかる電圧が V_Z

¹Clarence Melvin Zener (クラレンス・メルヴィン・ツェナー) (1905–1993): アメリカの物理学者。

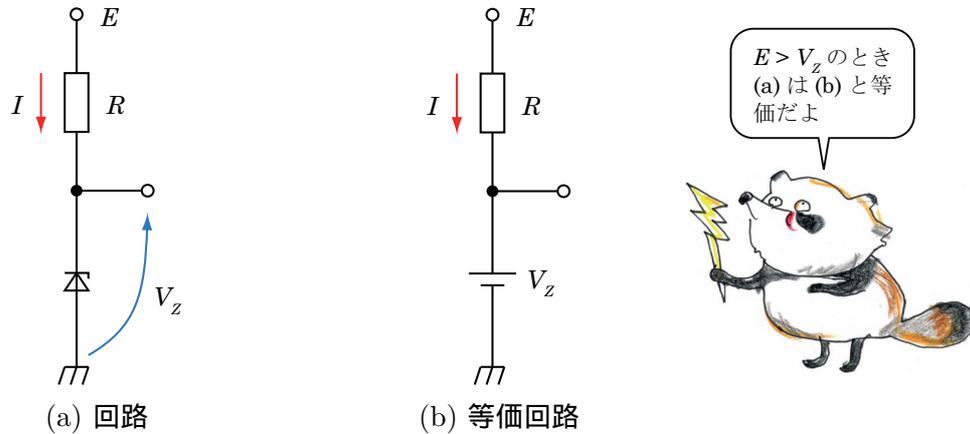


図 6.6 定電圧回路

より大きいとき、電流はいくらでも流れる。ゆえに同図 (b) のような等価回路となる。

$$I = \frac{E - V_Z}{R} \quad (6.1)$$

である。

この回路を定電圧電源とみなし、負荷 R_L を接続したときの回路図が図 6.7(a)、その等価回路が同図 (b) である。これは書籍中の図 6.17 (書籍中 p.278) と同じパターンである。

負荷を接続しているか否かにかかわらず、抵抗 R に流れる電流 I_1 は

$$I_1 = \frac{E - V_Z}{R} \quad (6.2)$$

である。負荷 R_L を接続していないとき、ツェナーダイオードに流れる電流 I_3 は $I_1 = I_3$ であり、ツェナーダイオードで $V_Z I_1$ の電力が消費される。この電力はツェナーダイオードの許容損失より小さくなくてはならない。

負荷を接続すると、負荷には

$$I_2 = \frac{V_Z}{R_L} \quad (6.3)$$

の電流が流れ、残りの電流 $I_3 = I_1 - I_2$ がツェナーダイオードに流れる。 E, V_Z, I_1 はあらかじめ与えられた値であり、 $I_1 = I_2 + I_3$ なので、この回路は以下の性質を持っている。

- R で消費される電力は一定である。
- 負荷 R_L で消費される電力とツェナーダイオードで消費される電力の和は一定である。その比率は負荷の抵抗値 R_L によって定まる。
- ゆえにこの回路全体で消費される電力 (R で消費される電力 + ツェナーダイオードで消費される電力 + R_L で消費される電力) は一定である。

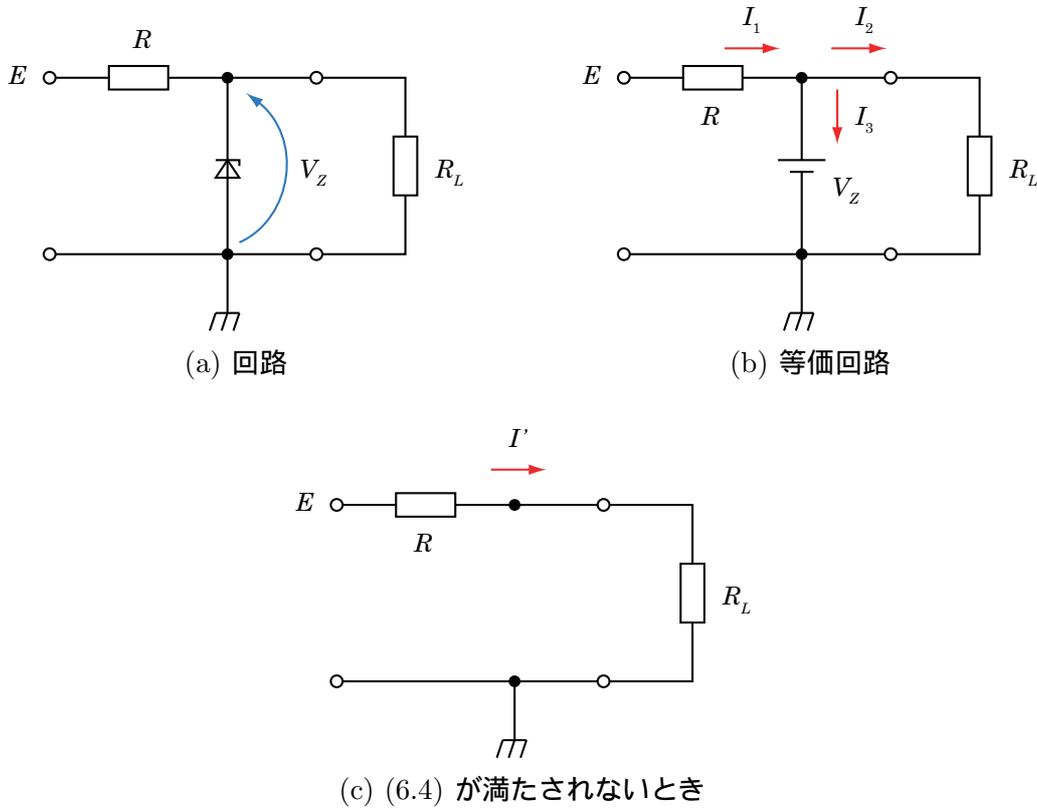


図 6.7 ツェナーダイオードを使った定電圧電源

この回路は常に R で電力が消費され、ツェナーダイオードでも電力が消費されるため効率が良くない。また、負荷で消費可能な最大電力はツェナーダイオードの許容損失で定められ、大きな値はとれない。

この回路が定電圧回路として機能するには、(6.2)(6.3) より、

$$\frac{E - V_Z}{R} > \frac{V_Z}{R_L} \quad (6.4)$$

が満たされることが必要である。

(6.4) が満たされないとき、ツェナーダイオードにかかる電圧は V_Z より小さくなる。そのときの等価回路を図 6.7(c) に示す。ツェナーダイオードは存在しないのと同じになり、定電圧電源ではなくなる。

第7章 おまけ

7.1 スイッチ回路の Tips (「7.4 増幅回路」の手前に配置)

7.1.1 還流ダイオード

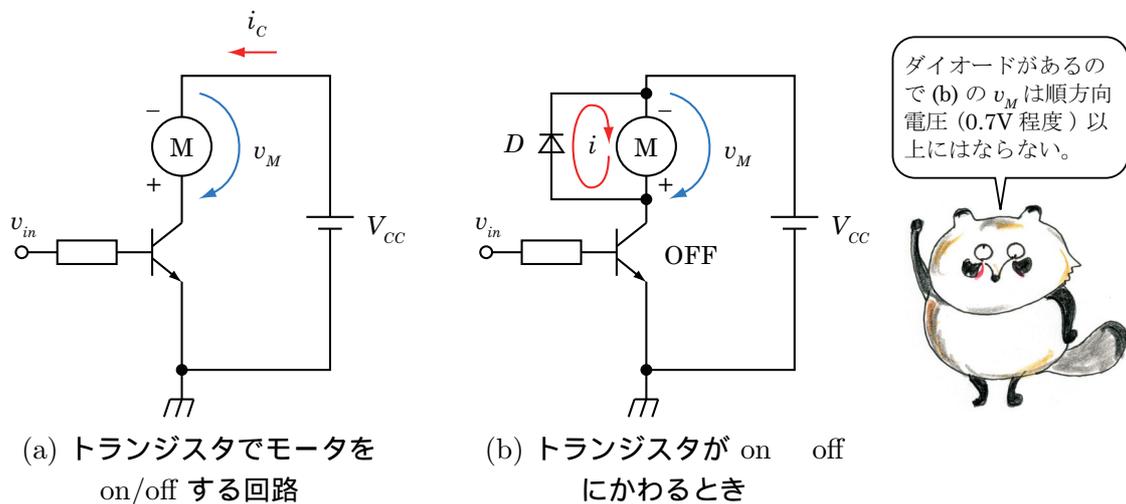


図 7.1 還流ダイオード

トランジスタをスイッチとして用いるとき、負荷としてインダクタンス L を含む素子を用いる場合がある (誘導性負荷という)。例えばモータやリレーはインダクタンスを含む。図 7.1(a) においてモータを抵抗 R とインダクタンス L の直列接続で近似できると仮定すると、

$$v_M = - \left(L \frac{di_C}{dt} + R i_C \right)$$

の関係が成立する。トランジスタが off になり、電流 i_C が瞬時に 0 になると仮定すると、 $\frac{di_C}{dt}$ はその瞬間だけ $-\infty$ となるので、数式的にはその瞬間だけ

$$v_M = \infty \quad (7.1)$$

となる。電流を流しつづけようとする向きに、モータの両端に高電圧が発生する¹。「電源電圧 V_{CC} 」と「モータの両端に発生した高電圧」を合計した値がトランジスタにかかり、トランジスタが破壊される恐れがある。

これを防止するため図 7.1(b) のようにダイオード D を入れる。逆方向に入っているのので、トランジスタが on のときダイオードに電流は流れない。トランジスタが on off に切り替わる瞬間に、インダクタンスに蓄積されたエネルギーがダイオードを介して消費され、図中の矢印の向きに電流が流れる。ダイオードの特性は書籍中の図 6.3(d)(書籍中の p.264) で表されるので、 v_M の大きさは順方向電圧 ($0.6\text{V} \sim 0.8\text{V}$) 以上にはならない。これを還流ダイオード (freewheel diode: フリーホイールダイオード) と呼ぶ。

7.2 トランジスタの応用回路 (「7.9 電界効果トランジスタ」の手前に配置)

7.2.1 ダーリントン接続

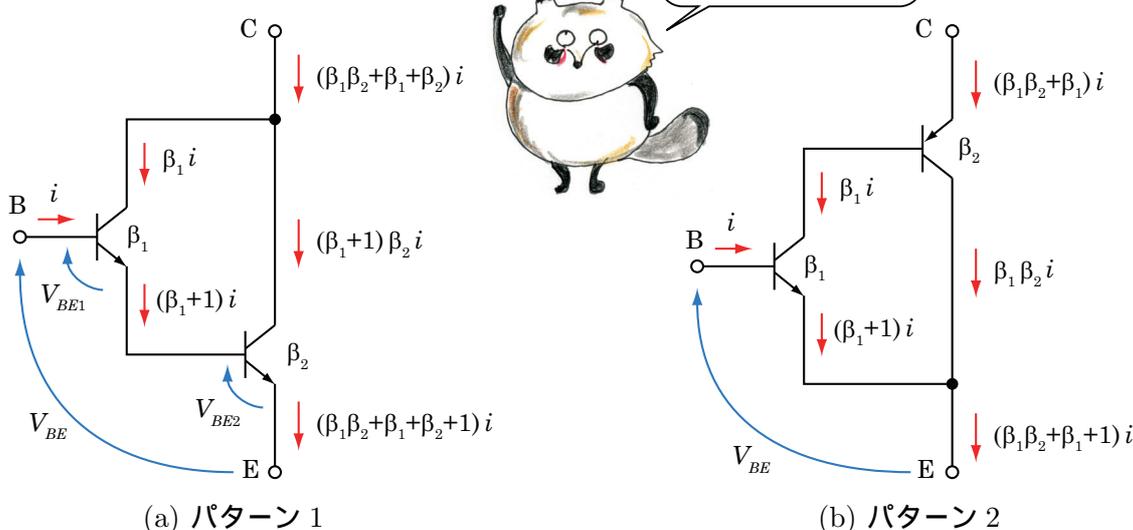


図 7.2 ダーリントン接続

トランジスタを 2 つ使用して、巨大な電流増幅率を持つ 1 つのトランジスタと等価な働きをさせる回路構成がある。図 7.2(a)(b) がその回路で、ダーリントン (darlington) 接続と

¹例えば、あるリレーでは 80V 程度のスパイク状の電圧が発生した。エネルギーの観点からみると、コイルに電流が流れていることは、コイルに磁気エネルギーが蓄えられていることを意味する。コイルに流れる電流が減少すると、その変化を妨げて電流を元の値に戻そうとする方向に電圧を発生させ、蓄積した磁気エネルギーを放出する。

呼ばれる。

図 7.2(a) について考える。各トランジスタの電流増幅率をそれぞれ β_1, β_2 とし、端子 B から流れ出す電流を i とすると、回路の各場所の電流は図中に示す値となる。

$$\beta_1\beta_2 + \beta_1 + \beta_2 \simeq \beta_1\beta_2$$

とみなすと、回路全体の電流増幅率は $\beta_1\beta_2$ となる。

図 7.2(b) についても同様に、回路中に電流値を書き込んでいる。

$$\beta_1\beta_2 + \beta_1 \simeq \beta_1\beta_2$$

と近似すると、回路全体の電流増幅率は $\beta_1\beta_2$ となる。

図 7.2(a) では $V_{BE} = V_{BE1} + V_{BE2}$ となるので、端子 B と端子 E の間の電圧はトランジスタ 2 個分になり、B-E 間の抵抗もトランジスタ 1 個のときに比べると大きくなる。図 7.2(b) における電圧 V_{BE} はトランジスタ 1 個分であり、B-E 間の抵抗もトランジスタ 1 個分に等しい。

7.2.2 カレントミラー回路

基本回路

図 7.3(a) の回路をカレントミラー (current mirror) 回路と呼ぶ。回路の複数箇所に同一値の電流を流すための回路である。電流源を実現するのに使われる。トランジスタ Q_1, Q_2 が同一の特性を持つとき、トランジスタ Q_2 のコレクタ電流 I_C は I_R にほぼ等しい。

その理由は以下のように説明できる。図 7.3(a) の 2 個のトランジスタが同一の特性を持つとき、ベース-エミッタ間の電圧が同一なので、ベース電流 I も同一である。 I を基準として、回路の各場所を流れる電流を図 7.3(a) 中に記入する。ただし、トランジスタの電流増幅率を β とする。

$$I_R = \beta I + 2I = (\beta + 2)I \simeq \beta I = I_C \quad (7.2)$$

が成立するので、トランジスタ Q_2 のコレクタ電流 I_C は I_R に等しい。図 7.3(a) の点線で囲んだ部分は電流源として働く。

実際の回路は例えば図 7.3(b) のようになる。トランジスタのベース-エミッタ間電圧を V_{BE} とすると、

$$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$$

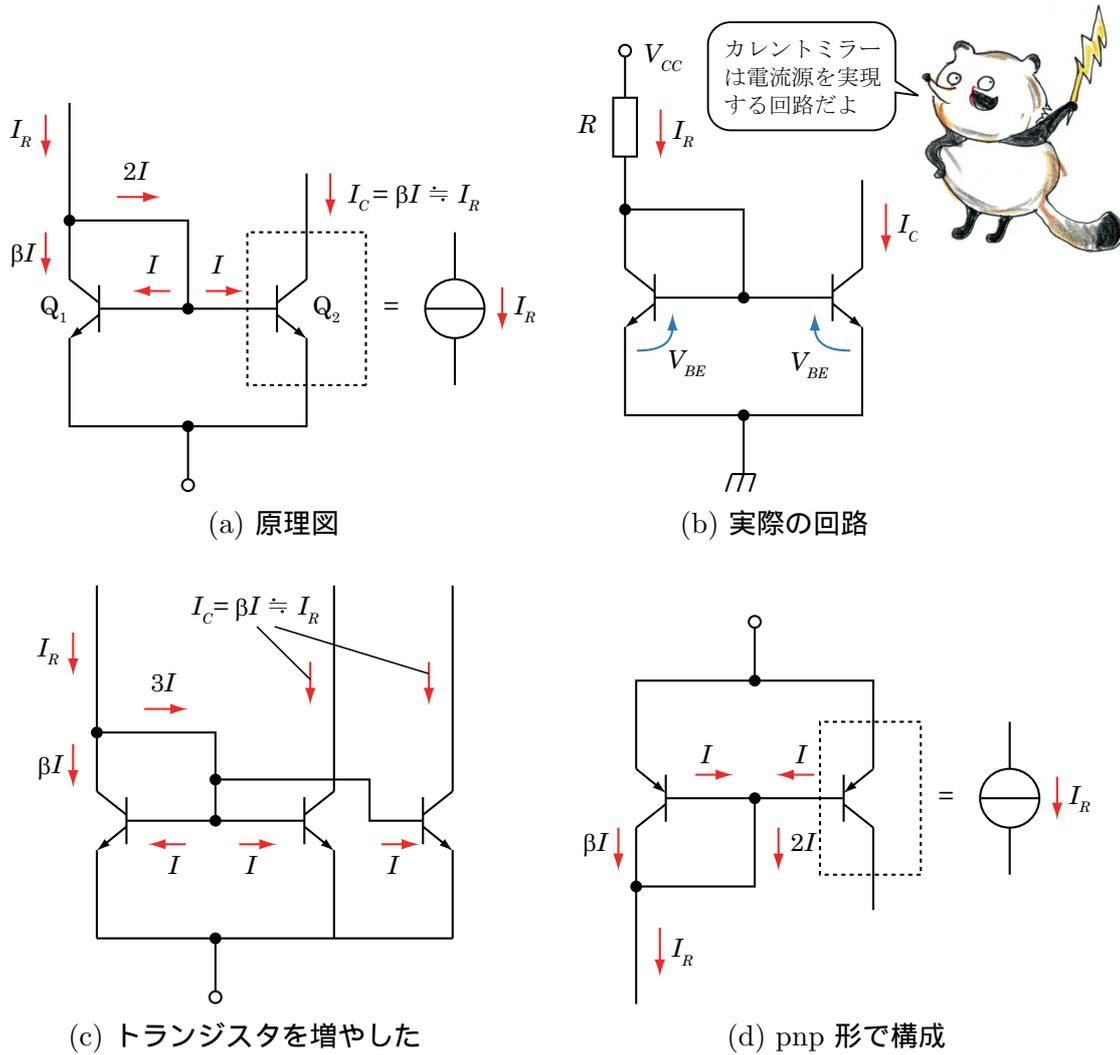


図 7.3 カレントミラー回路

である。

ミラー用のトランジスタはさらに増やすことができる。1個増やした例を図 7.3(c) に示す。図 7.3(a) における下端の白丸端子は通常はアースに接続されるので、同図 (a) の電流源はアースに接続されている。電流源を電源端子に接続するには図 7.3(d) のように pnp 形でカレントミラーを組む。同図 7.3(d) の上端の白丸端子は通常は電源（電圧源）に接続される。

図 7.4 は比を設定することができる。以下の式が成立する。

$$V = R_1(\beta + 1)I + V_{BE} \quad (7.3)$$

$$V = R_2(\beta + 1)I' + V_{BE} \quad (7.4)$$

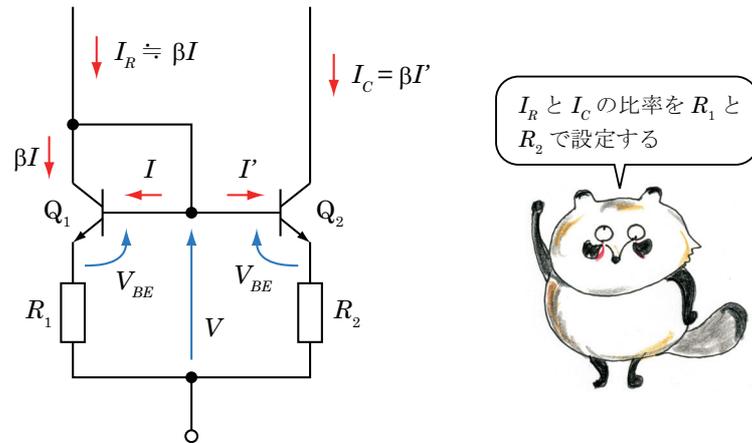


図 7.4 比を設定できるカレントミラー

(7.3) = (7.4) より

$$\begin{aligned}
 R_1(\cancel{\beta+1})I &= R_2(\cancel{\beta+1})I' \\
 I' &= \frac{R_1}{R_2}I
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
 I_R &= \beta I + I + I' \\
 &\simeq \beta I
 \end{aligned}
 \tag{7.6}$$

と近似できる。 I_C を求めると、

$$\begin{aligned}
 I_C &= \beta I' \\
 &= \beta \frac{R_1}{R_2} I \quad (7.5) \text{ を利用} \\
 &= \frac{R_1}{R_2} I_R \quad (7.6) \text{ を利用}
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

となり、トランジスタ Q_2 のコレクタ電流 I_C は、 I_R に比率 $\frac{R_1}{R_2}$ をかけた値になる。

7.3 MOSFET の使用例 (7.9.4 の末尾に追加)

インバータ

本書では取り扱わないが、デジタル回路という分野がある。例えば、コンピュータの CPU は非常に複雑なデジタル回路である。デジタル回路の中は 1 を表す電圧 (5V, 3.3V が良く使われる) と 0 を表す電圧 (0V) しか存在しない。

デジタル回路の 3 つの基本素子は NOT, AND, OR である。本節では一番基本的な素子である NOT の構成法を説明する。

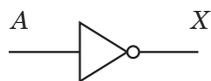


図 7.7 インバータの回路記号

表 7.1 インバータの真理値表

入力 A	出力 X
0	1
1	0

NOT は「インバータ」とも呼ばれ、図 7.7 の回路記号で表す。A は入力、X は出力を表す。入力と出力の関係を表 7.1 に示す。

インバータを実現する回路を図 7.8(a) に示す。2 つの MOSFET はスイッチとして働く。動作原理を同図 (b)(c) に示す。入力電圧 V_{in} は 0 か V_{DD} の二者択一の値をとる。

$V_{in} = 0$ のとき、図 7.8(b) のように、p チャンネル MOSFET は on 状態、n チャンネル MOSFET は off 状態になる。出力端子は V_{DD} に接続された状態となり、 $V_{out} = V_{DD}$ である。次に、 $V_{in} = V_{DD}$ のとき、図 7.8(c) のように、p チャンネル MOSFET は off 状態、n チャンネル MOSFET は on 状態になる。出力端子はアースに接続された状態となり、 $V_{out} = 0$ となる。結果として、表 7.1 の入出力特性が得られ、図 7.8(a) の回路はインバータである。

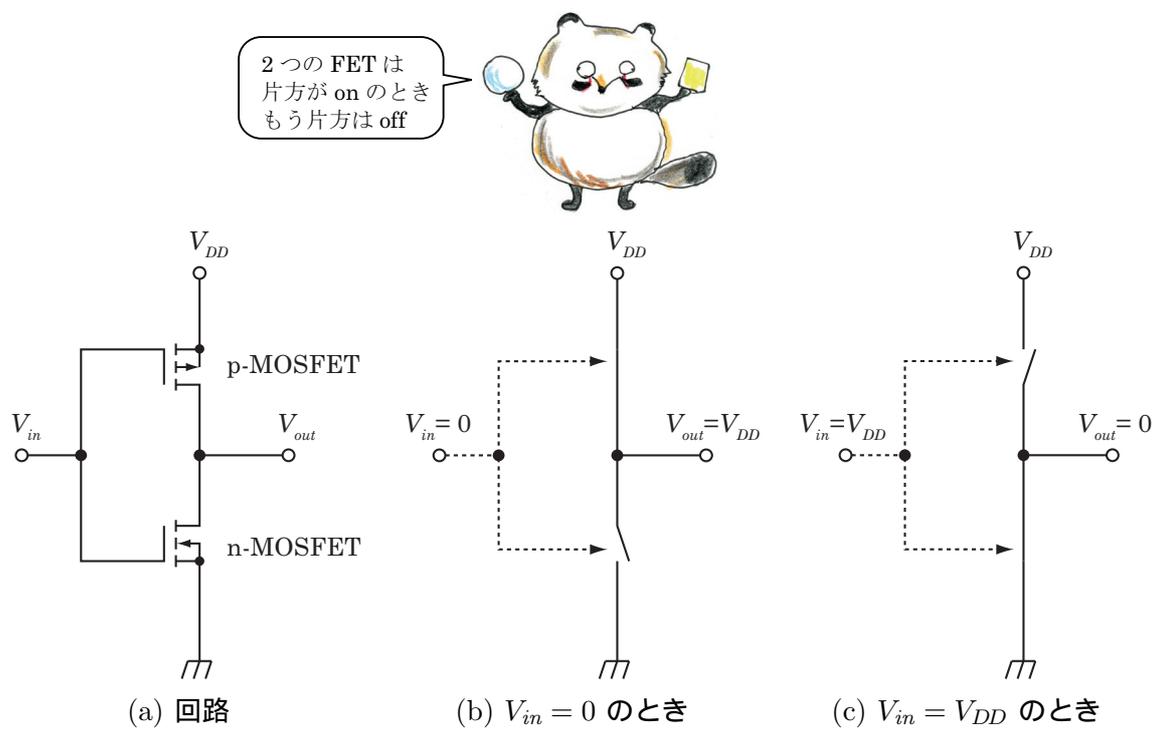


図 7.8 インバータ

付録 B 微分方程式の基礎

B.1 微分とは

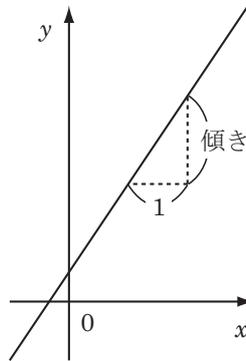


図 B.1 傾き

「傾き」は直線に対して定義されるものである。図 B.1 のように、 x が 1 増えたときの y の増分値を傾きという。

図 B.2(a) の関数 $y = f(x)$ は直線ではないので、傾きは定義できない。図に示すように、各々の x の場所で「接線」を引き、接線の傾きを $g(x)$ とするなら、関数 $g(x)$ は同図 (b) のようになる。この例の場合、

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$g(x) = x$$

である。このとき $f(x)$ と $g(x)$ は以下の関係を持つ。

$$f(x) \overset{\text{微分}}{\Rightarrow} g(x)$$

「微分」は関数と関数の関係を表す用語である。

y が x の関数であるとき、 y を x で微分したものを表す記号は以下のように 3 通りある。

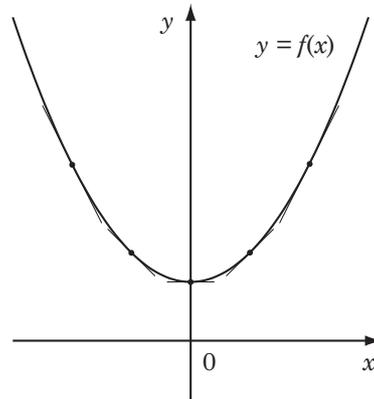
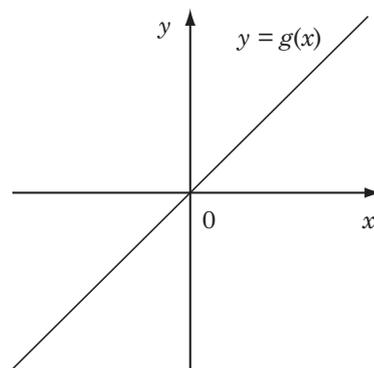
(a) $f(x)$ のグラフ(b) $g(x)$ のグラフ

図 B.2 微分とは

- (1) y'
- (2) \dot{y}
- (3) $\frac{dy}{dx}$ または $\frac{d}{dx}y$

(1) はラグランジュ¹の記法、(2) はニュートン²の記法、(3) はライプニッツ³の記法と呼ばれる。(2) は高校数学では出てこないが、力学の分野で時間に関する微分を表すのに用いられる。

微分の表し方が何種類もあるのは以下の理由による。微分学はニュートンとライプニッツがほぼ同時期に発見し、学派によって異なる記号を用いた。それから約 100 年後、ラグ

¹Joseph Louis Lagrange (ジョゼフ・ルイ・ラグランジュ)(1736–1813): イタリア生まれのフランスの数学者。

²Isaac Newton (アイザック・ニュートン)(1643–1727): イギリスの数学者、物理学者、天文学者。

³Gottfried Wilhelm Leibnitz (ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ)(1646–1716): ドイツの哲学者、数学者。

ランジュはダッシュを使う記法を創案した。

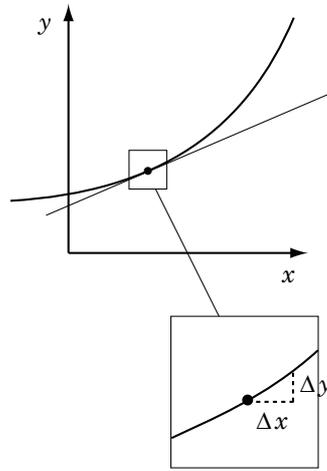


図 B.3 接線

接線の傾きは図 B.3 のように求めることができる。黒丸で表した場所の接線の傾きは、 x を微小な値 Δx だけ増やしたときの y の増分 Δy が分かれば、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ である。 $y = x^2$ の場合、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$(\Delta x)^2$ は他の項と比べると微小なので無視する。

$$\simeq \frac{2x \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2x$$

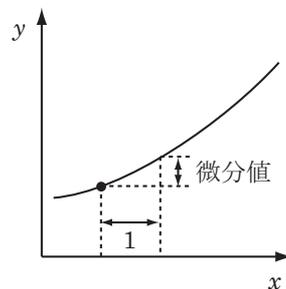


図 B.4 変化がゆるやかなとき

傾きの定義は「 x が 1 増えたときの y の増分値」だから、 $y = f(x)$ が緩やかな変化をするときは、図 B.4 のようにみなすことができる。

主要な関数の微分の公式を以下に示す。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

コラム ストックとフロー

「微分」「積分」というと難しそうな印象を受けるが、実は、身の回りに「微分」「積分」の関係を持つ量はたくさんある。

単位時間を 1 日とする。

財布の中のお金の量を微分すると、1 日に使った（もらった）お金の量となる。

琵琶湖⁴の水量を微分すると、その日に琵琶湖に流れ込んだ（流れ出した）水量が得られる。

世の中に「ストック」と「フロー」の関係を持つ量は色々あるが、これらは微分積分の関係がある。ストックを微分するとフローになり、フローを積分するとストックとなる。

B.2 微分に関する公式

合成関数の微分

$y = f(x)$, $z = g(y)$ のように y は x の関数であり、 z は y の関数であるとき、

$$z = g(y) = g(f(x)) = h(x)$$

と考えると、 z は x の関数である。 z を x で微分すると、

$$h'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = f'(x)g'(y) \quad (\text{B.1})$$

⁴なぜ唐突に琵琶湖なのか？ と思う読者がいるかも知れない。筆者は京都出身だが、京都人にとって琵琶湖は身近である。毎日飲んでいる水道水は琵琶湖疎水の水である。夏、泳ぎたいときは、琵琶湖まで行けば（車で約 1 時間）、琵琶湖西岸には水のきれいな水泳場がたくさんある。海に比べると、湖は (1) 冷たくない、(2) 波がないので泳ぎやすい、(3) 塩がないので泳いだ後シャワー無しでも何とかなる、(4) 地形が箱庭みたいで楽しい、というメリットがある。

である。この公式はライプニッツの表記 $\frac{dz}{dx}$ を用いると、暗記しやすく分かりやすい。この公式を適用すると以下の公式が得られる。

$$(e^{ax})' = ae^{ax} \quad (\text{B.2a})$$

$$(e^{-ax})' = -ae^{-ax} \quad (\text{B.2b})$$

$$(\sin ax)' = a \cos ax \quad (\text{B.2c})$$

$$(\cos ax)' = -a \sin ax \quad (\text{B.2d})$$

例えば、(B.2c) は次のように公式 (B.1) を適用して導出できる。

$$y = ax$$

$$z = \sin y$$

と考えると、

$$\begin{aligned} \overbrace{(\sin ax)'}^z &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{d(\sin y)}{dy} \cdot \frac{d(ax)}{dx} \\ &= \cos y \cdot a \\ &= a \cos ax \quad y = ax \text{ を適用} \end{aligned}$$

と導出できた。

B.3 物理現象と微分方程式

高校数学では関数は $y = f(x)$ のように表され、 x が独立変数、 y が従属変数であった。電気回路においては、電圧 v や電流 i などの物理量は時刻 t の関数であるから、独立変数は通常は t である。時刻の単位は秒である。

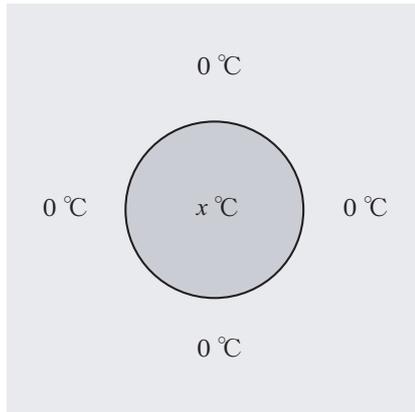
独立変数 t は省略されることが多い。例えば、

$$\frac{dv}{dt} + kv = E$$

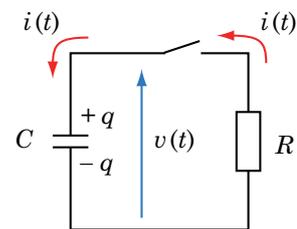
のように、変数 v は t の関数であるが、 $v(t)$ とは書かず、単に v と書くことが多い。また、 v' と書くと、 v を t で微分した値を意味する。電気工学以外の分野においても物理量は時刻 t の関数であることが多い。

微分を含む方程式を微分方程式と呼ぶ。物理現象を記述する方程式をたてると、微分方程式が得られることが多い。本節では物理現象とそれを表す微分方程式について学習する。

指数関数的減衰



(a) 物体が冷える現象



(b) コンデンサの放電現象

図 B.5 指数関数的減衰の例

図 B.5(a) の現象について考える。温度が x の熱い物体が温度 0 の場所に置かれている。熱い物体から周囲へ熱が流れる。1 秒間に流れる熱量は「物体の温度」と「周囲の温度」の差に比例する。この場合、周囲の温度が 0 なので、流れる熱量は kx である (k は比例係数)。以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (\text{B.3})$$

物体の温度が周囲より高いとき、物体は冷える（すなわち傾きは負の値となる）から、右辺はマイナスが付いている。

「微分方程式 (B.3) を解く」ことは「(B.3) を満たす関数 $x(t)$ を求める」ことを意味する。(B.3) を書き直すと

$$\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。(B.4) は「 x を微分したもの」と「自分自身に k をかけたもの」を足すと 0 になることを表している。これを満たす関数は指数関数

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (A \text{ は任意定数}) \quad (\text{B.5})$$

である。 A は任意定数と呼ばれ、初期条件（例えば $t = 0$ のときの x の値）から定まる。

(B.5) を (B.4) に代入すると

$$\begin{aligned}\lambda Ae^{\lambda t} + kAe^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda + k)Ae^{\lambda t} &= 0\end{aligned}$$

となり、

$$\lambda = -k$$

である。解は

$$x(t) = Ae^{-kt} \quad (\text{B.6})$$

と求まる。

次に、任意定数 A の値を求める。 $t = 0$ のとき $x = 1$ という条件が与えられた場合、(B.6) に代入することで、 $A = 1$ が得られる。 $x(t)$ のグラフは図 B.6 のようになる。ここでは $k = 1$ の場合を描いた。 $k = 2$ の場合は横方向を半分に縮めたグラフとなる。

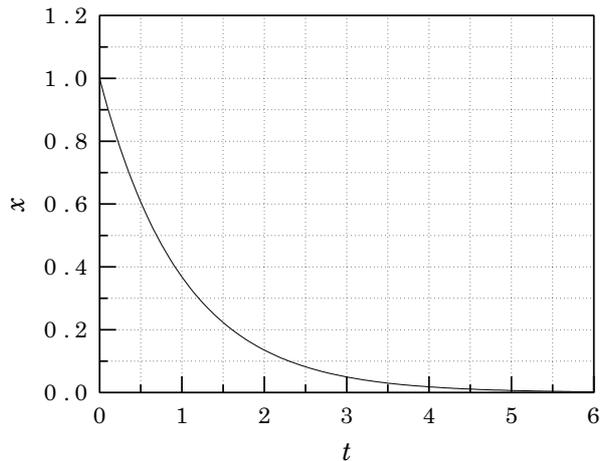


図 B.6 指数関数的減衰を表すグラフ

(B.6) は減衰する現象を表す関数であり、物理現象を表す基本的な関数の 1 つである。例えば、ギターのコブの弦を弾いたときに、弦の振幅が減衰する現象は、この関数で表される。「指数関数的に減衰する（あるいは減少する）」という表現に出会ったときは図 B.6 のカーブを思い浮かべればよい。

図 B.5(b) における現象について考える。コンデンサに電荷 $\pm q$ が貯まっており、 $t = 0$ においてスイッチを閉じる。コンデンサに蓄積された電荷は抵抗を通じて放電し、やがて 0 になる。このときの電圧 $v(t)$ が満たす式を導出する。

電荷 $q(t)$ と電圧 $v(t)$ は以下の関係がある。 C はコンデンサの容量である。

$$q = Cv \quad (\text{B.7})$$

両辺を t で微分すると、

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (\text{B.8})$$

が得られる。電流の定義⁵より、電荷を微分すると電流になるから、

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (\text{B.9})$$

である。一方、 i はオームの法則からも求まるので、

$$i = -\frac{v}{R} \quad (\text{B.10})$$

である。図 B.5(b) において、電圧と電流の向きが同じ方向なので、(B.10) の右辺にマイナスがついている。

(B.8) の左辺の $\frac{dq}{dt}$ を (B.9) を用いて i で置換し、さらに、(B.10) を用いて $-\frac{v}{R}$ で置換すると、

$$C \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R}$$

が得られる。移項して

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (\text{B.11})$$

となる。図 B.5(a) と (b) は異なる物理現象であるが、方程式をたてるとそれぞれ (B.4) と (B.11) になり、同形の式になった。

B.4 電気回路で現れる微分方程式

微分方程式は様々なパターンがあるが、電気回路を記述するときに登場する微分方程式は、以下のように、比較的簡単な形をしている。

x の 1 階微分⁶を含む方程式は以下のパターンがある。

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$(2a) \quad \frac{dx}{dt} + kx = E$$

$$(2b) \quad \frac{dx}{dt} + kx = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

⁵電流の定義: 1 秒間に 1C の電荷が導線の断面を通過するとき 1A

⁶微分学においては、微分した回数を「階」で表す。「 x の 1 階微分」は「 x を 1 回微分したこと」を意味する。

(1) のように x とその微分項のみが方程式に含まれるとき同次方程式 (homogeneous equation)⁷ という。(2a)(2b) のように x を含まない項を持つとき非同次方程式 (inhomogeneous equation)⁸ という。右辺は外力 (強制項と言うこともある) を表す項であり、(2a) の右辺は定数、(2b) の右辺は正弦関数である。 x の 1 階微分を含む微分方程式を解くためには 1 個の初期条件 (例えば $t = 0$ のとき $x = 1$ というような条件) が必要である。

(1) の解き方は前節、(2a) の解き方は書籍中の 4.4 節、(2b) の解き方は本 PDF 中の 4.2 節 (p.23) で説明した。

⁷ 斉次方程式と表記する本もある。

⁸ 非斉次方程式と表記する本もある。

付録C フーリエ級数展開

C.1 フーリエ級数展開とは

フーリエ¹級数展開の定理を以下に示す。

全ての周期波形は、その周期を一周期とする正弦波とその **整数倍** の周波数の正弦波の和に分解することができる。

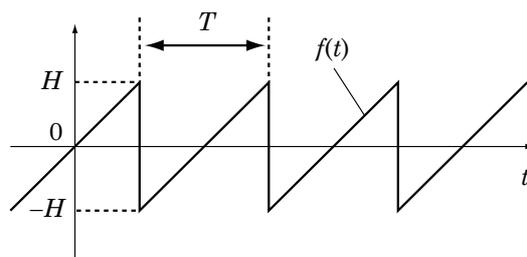


図 C.1 周期波形

例えば、図 C.1 の $f(t)$ はのこぎり波 (saw wave) と呼ばれる波形で、アナログオシロスコープの掃引回路などで使用される。周期 T を持つ周期波形なので、フーリエ級数展開の理論に従って、以下のように分解することができる。

$$f(t) = \frac{2H}{\pi} \left\{ \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) \cdots \right\} \quad (\text{C.1})$$

ただし $\omega = \frac{2\pi}{T}$

このように周期波形を正弦波の和に分解することをフーリエ級数展開するという。(C.1) を図で説明すると、図 C.2 のようになる。ただし、 $H = \frac{\pi}{2}$ とおいた。

\sin と \cos の係数をグラフで表すと図 C.3 となり、この図を周波数スペクトラムと呼ぶ。周波数スペクトラムの横軸は「高調波の次数」である。図 C.1 ののこぎり波は奇関数なので、偶関数である \cos の係数は全て 0 である。

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ) (1768–1830): フランスの数学者、物理学者。

(C.1) の場合、 $\sin \omega t$ を「基本波」と呼び、それ以外の項を「高調波」と呼ぶ。 $\sin 2\omega t$ は「2倍高調波」と呼ぶ。同様に $\sin n\omega t$ は「 n 倍高調波」と呼ぶ。(C.1) には \sin の項しか含まれていないが、 \cos の項についても同様である。

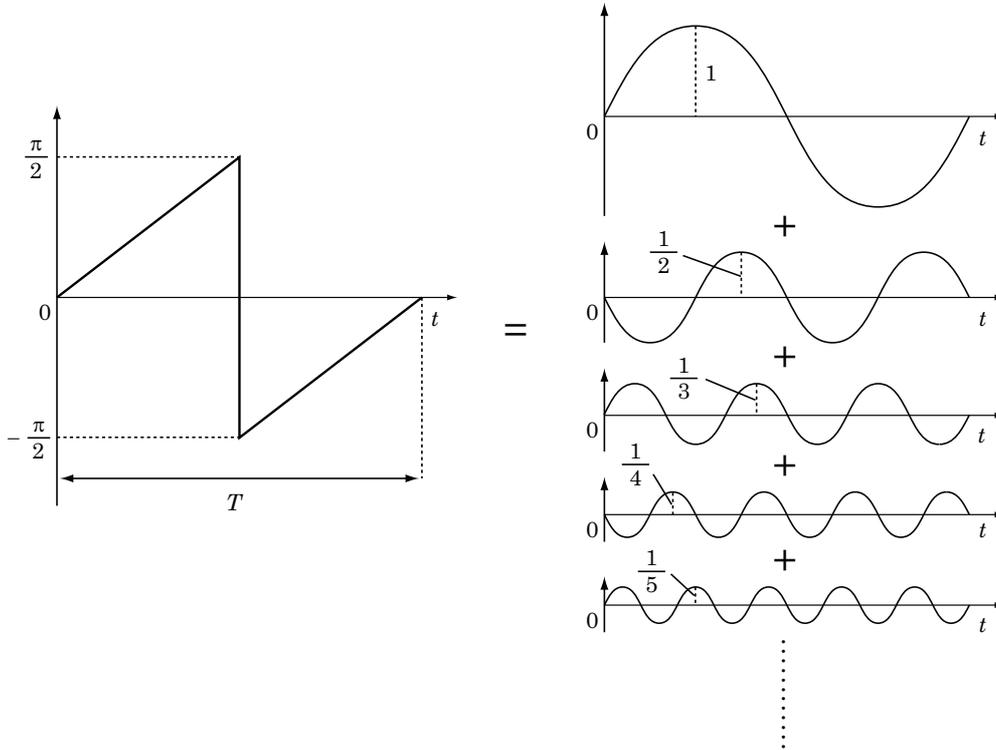


図 C.2 のこぎり波のフーリエ級数展開

C.2 フーリエ級数展開の方法

前節で示したように、関数 $f(t)$ が周期 T を持つとき、以下のように正弦波の和に分解できる。

$$f(t) = D + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + \dots + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + B_3 \sin(3\omega t) + \dots \quad (\text{C.2})$$

$$\text{ただし } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

式中の係数 D (直流成分)、 A_n (\cos 成分の振幅)、 B_n (\sin 成分の振幅) はそれぞれ次

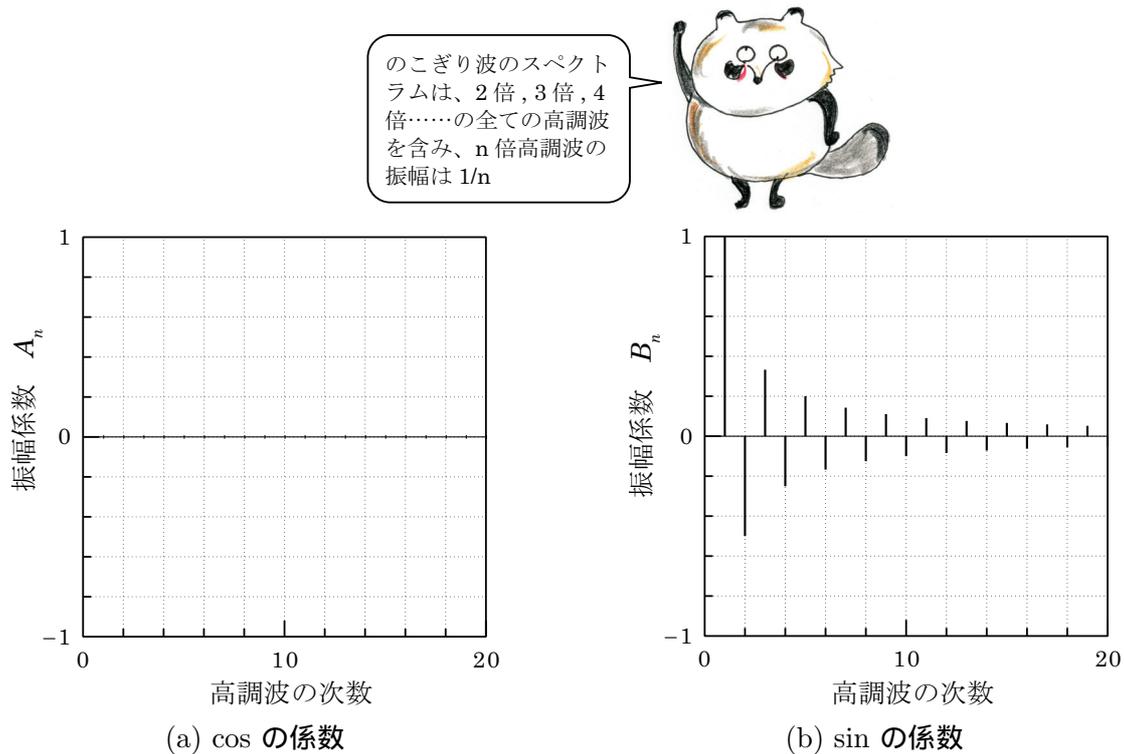


図 C.3 のこぎり波のスペクトラム

式で得られる。

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (C.3)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (C.4)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (C.5)$$

D は直流成分なので (C.3) は波形の平均をとる操作を意味している。 A_n と B_n を得る (C.4)(C.5) は正弦関数の以下の性質から導出される。ただし、 n_1 と n_2 は 1 以上の整数である。

$$\int_0^T \sin(n_1\omega t) \cos(n_2\omega t) dt = 0 \quad (n_1 \text{ と } n_2 \text{ は任意}) \quad (C.6)$$

$$\int_0^T \sin(n_1\omega t) \sin(n_2\omega t) dt = 0 \quad (n_1 \neq n_2 \text{ のとき}) \quad (C.7)$$

$$\int_0^T \cos(n_1\omega t) \cos(n_2\omega t) dt = 0 \quad (n_1 \neq n_2 \text{ のとき}) \quad (C.8)$$

上式のように、 $f(t) \cdot g(t)$ を積分すると 0 になるとき、「関数 $f(t)$ と $g(t)$ は直交してい

る」と言う²。この性質を利用すると公式 (C.4)(C.5) は以下のように導出できる。

例として、 A_2 を得たい場合を考える。(C.2) の両辺に $\cos(2\omega t)$ を掛けて、 $t = 0$ から T まで積分すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(t) \cos(2\omega t) dt && (C.9) \\ &= \int_0^T D \cos(2\omega t) dt \\ &+ \int_0^T A_1 \cos(\omega t) \cos(2\omega t) dt + \int_0^T A_2 \cos(2\omega t) \cos(2\omega t) dt + \dots \\ &+ \int_0^T B_1 \sin(\omega t) \cos(2\omega t) dt + \int_0^T B_2 \sin(2\omega t) \cos(2\omega t) dt + \dots \end{aligned}$$

上式に直交関係 (C.6)(C.7)(C.8) を適用すると、右辺は の項以外は全て 0 になる。この項の値を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^T A_2 \cos^2(2\omega t) dt &= A_2 \int_0^T \frac{1 + \cos(4\omega t)}{2} dt \\ &= A_2 \left(\left[\frac{t}{2} \right]_0^T + \left[\frac{\sin(4\omega t)}{8\omega} \right]_0^T \right) \\ &= A_2 \frac{T}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$A_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\omega t) dt$$

が得られる。

C.2.1 正弦波の表現法

ここでは正弦波の表現法として n 次高調波は

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad (C.10)$$

という形式を使ったが、以下のような形式でも表せる。

$$C_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (C.11)$$

²ここでは区間について言及していないので、ややアバウトな表現となっている。関数の直交性を論じるときは区間についても言及する必要がある。三角関数は区間を 1 周期分にとる。ルジャンドル多項式は区間 $(-1, 1)$ で直交しており、エルミート多項式は区間 $(-\infty, \infty)$ で直交している。

次の関係が成立する。

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \quad (\text{C.12})$$

$$A_n = C_n \cos \phi_n, \quad B_n = C_n \sin \phi_n \quad (\text{C.13})$$

(C.12)(C.13) の関係を図 C.4 に示す。どちらの表現法を使うかは、用途に応じて使い分ければよい。なお、 $t = 0$ の位置を変えると A_n と B_n の値は変わるが、 C_n は不変である。

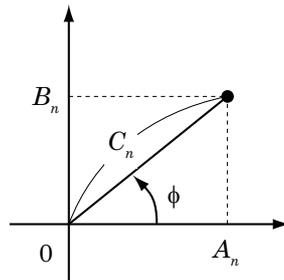


図 C.4 A_n, B_n と C_n, ϕ_n の関係

C.2.2 フーリエ級数展開の例

前項ではのこぎり波のフーリエ級数展開の例を示した。本項では代表的な周期波形のフーリエ級数展開の結果を示す。

方形波

図 C.5(a) は方形波 (square wave) と呼ばれ、デジタル回路などで現れる。式で表現すると次のようになる。

$$f(t) = \frac{4H}{\pi} \left\{ \cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right\} \quad (\text{C.14})$$

$H = \frac{\pi}{4}$ のとき、その周波数スペクトラムは図 C.5(b) のようになる。sin の係数 B_n は全て 0 なので、図は省略した。方形波は奇数次の高調波³のみを含み、 n 倍高調波の振幅は基本波の $\frac{1}{n}$ である。

図 C.5(a) は偶関数であるため cos の和で表されたが、この波形を $\frac{T}{4}$ 右にずらして奇関数にしたものをフーリエ級数展開すると、次式になる。

$$f(t) = \frac{4H}{\pi} \left\{ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right\} \quad (\text{C.15})$$

³音楽の分野では倍音と呼ぶ。

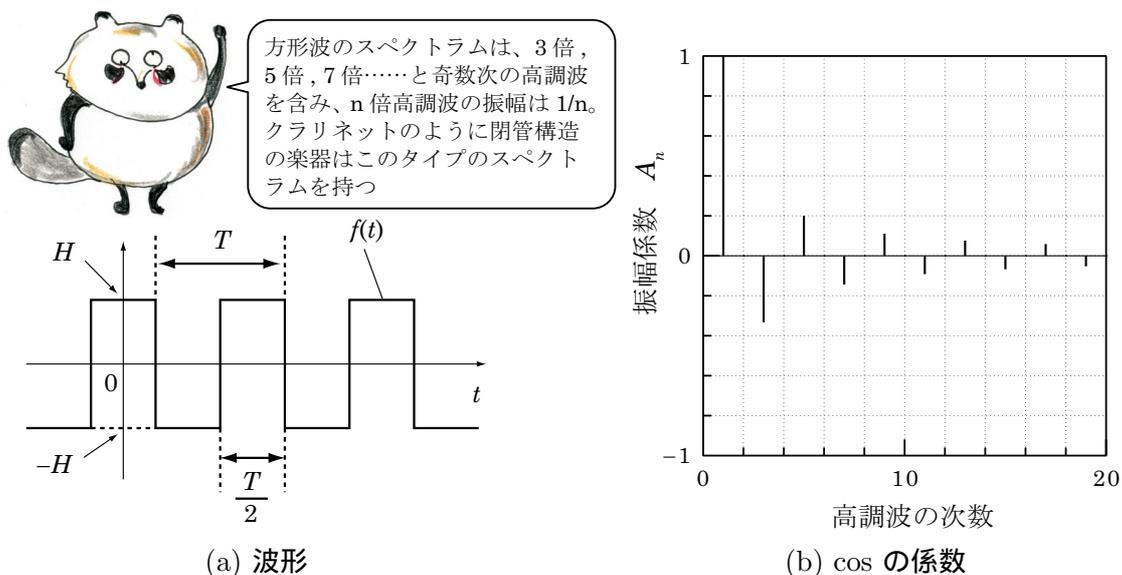


図 C.5 方形波とその周波数スペクトラム

(C.14) と (C.15) を比較すると、高調波の振幅の絶対値は等しい。このことは、(C.11) の形式に書き直すと、どちらの式も係数 C_n は同じになることを表している。

(C.14) を見ると、方形波を完全に表すには無限個の項数が必要である。項数を有限個で打ち切った場合に得られる波形を図 C.6 に示す。式 (C.14) の右辺第 3 項 (5 倍高調波) までの和、9 倍高調波までの和、19 倍高調波までの和をそれぞれ図 C.6(a)(b)(c) に示す。項数が増えるほど、原波形に近づく。

ただし、原波形に不連続な点がある場合、不連続点においては「原波形」と「無限個のフーリエ級数の和」は一致しない。これは、連続関数である正弦波の和で不連続関数を表すことに無理があるからである。図 C.6 を見ると、項数が増えると、原波形の不連続点において、トゲのような形状が見られる。無限個の項まで考慮すると図 C.7 のような形状になる。これをギブズ (ギブズと表記されることもある)⁴ の現象と呼ぶ。

図中のリップル量 Δ の大きさと不連続部の跳躍量 W は

$$\Delta = 0.089W$$

の関係がある。

矩形波

⁴Josiah Willard Gibbs (ジョサイア・ウィラード・ギブズ) (1839–1903): アメリカの数学者、物理学者。

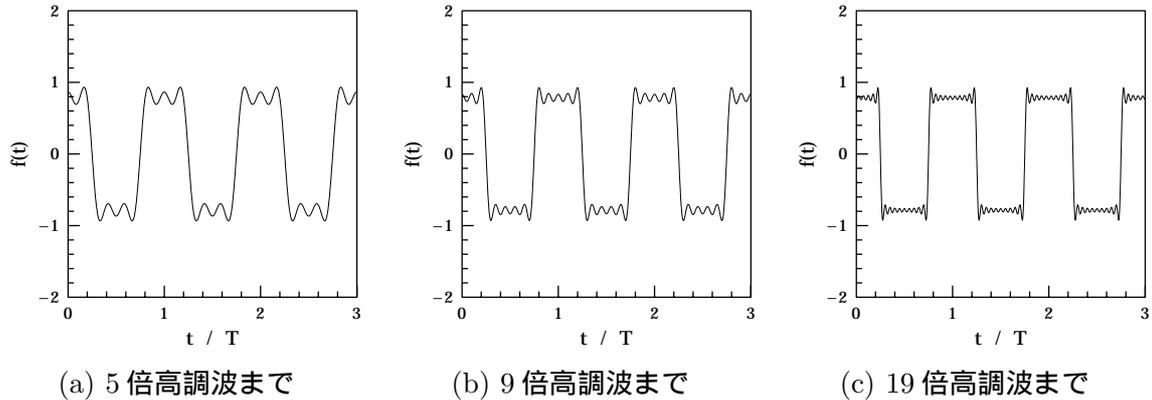


図 C.6 高調波の次数と方形波の再現度の関係

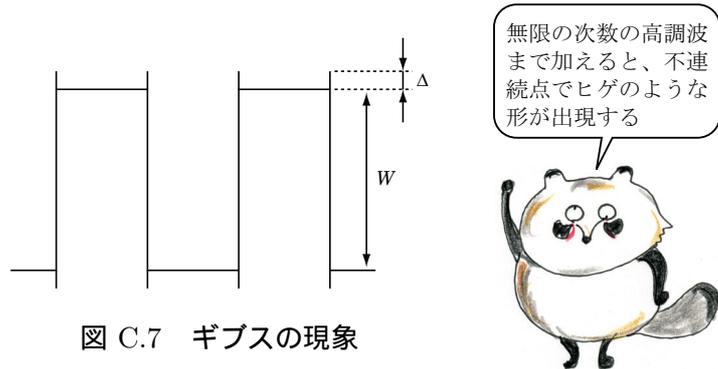


図 C.7 ギブスの現象

図 C.8(a) は矩形波 (rectangular wave) と呼ばれる。 Δ/T を duty factor と呼ぶ。前に紹介した方形波は duty factor = 0.5 の矩形波である。図 C.8 の矩形波をフーリエ級数展開したときの係数は次式で与えられる。偶関数となるよう $t = 0$ の位置を設定したので、 \sin の係数 B_n は 0 である。

$$D = dH \tag{C.16}$$

$$A_n = 2dH \frac{\sin(n\pi d)}{n\pi d} \tag{C.17}$$

$$B_n = 0 \tag{C.18}$$

ただし $d = \Delta/T$ (duty factor)

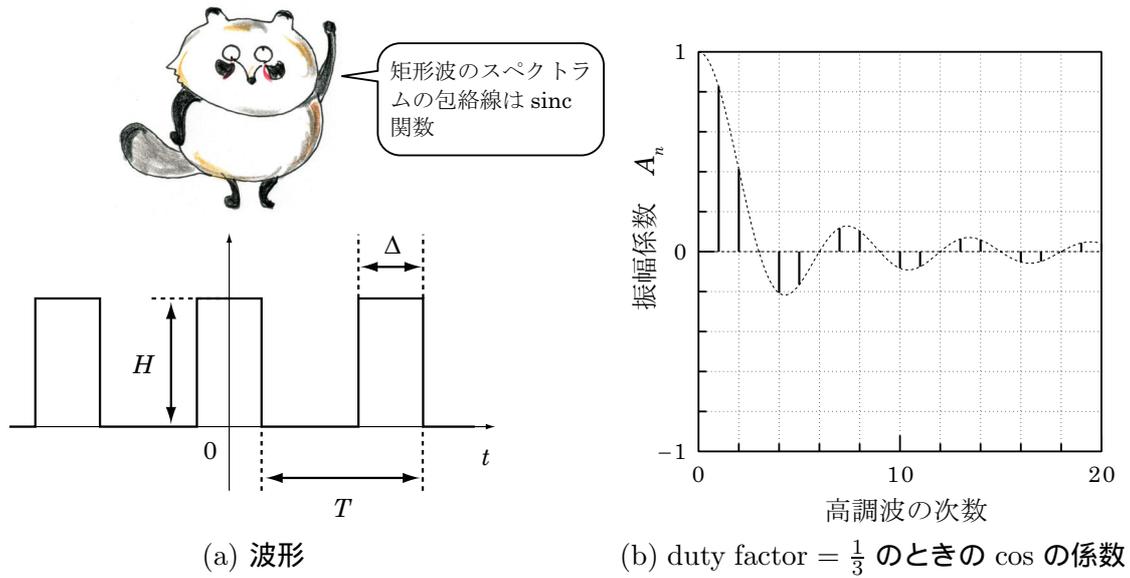


図 C.8 矩形波とその周波数スペクトラム

(C.17) を見ると、周波数スペクトラムの包絡線は sinc 関数⁵ で表され、その周期は duty factor によって決定される。例として、 $d = \frac{1}{3}$ のときのスペクトラムを図 C.8(b) に示す。

三角波

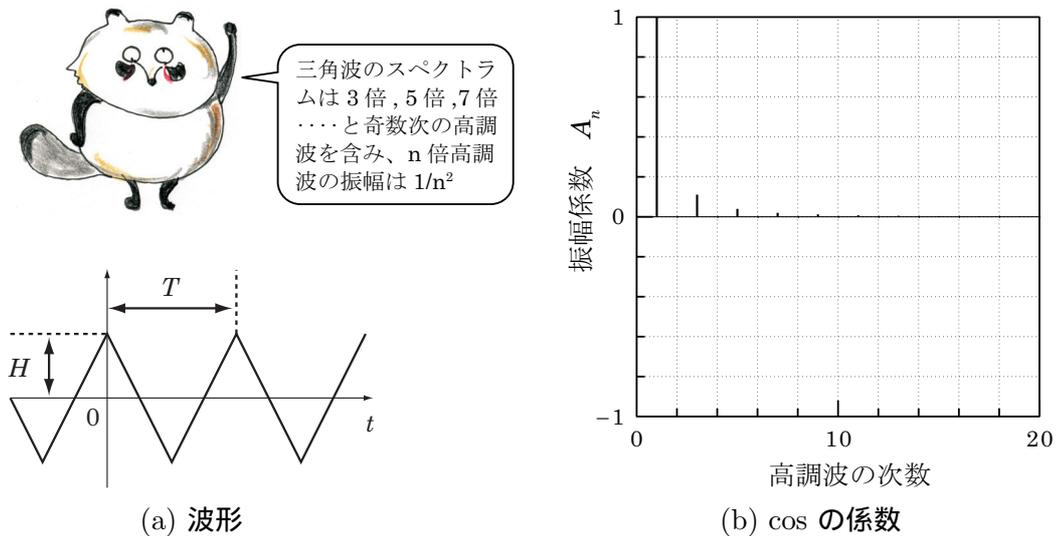


図 C.9 三角波とその周波数スペクトラム

⁵関数 $\frac{\sin(x)}{x}$ は sinc 関数と呼ばれる。サンプリング関数とも呼ばれる。

図 C.9(a) の波形を三角波 (triangle wave) という。フーリエ級数で表すと次式になる。

$$f(t) = \frac{8H}{\pi^2} \left\{ \cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \frac{1}{7^2} \cos(7\omega t) + \dots \right\} \quad (\text{C.19})$$

$\frac{8H}{\pi^2} = 1$ としたときの周波数スペクトラムを図 C.9(b) に示す。

加算する高調波の最大次数と原波形の再現性を図 C.10 に示す。三角波は、方形波と比べると、少ない項数で波形を精度良く再現できる。このことは、三角波を展開した (C.19) と方形波を展開した (C.14) (p.61) を比べると、三角波の方が高調波の振幅が小さいことから、説明できる。また、波形が急に变化する部分を持つとき、高調波の成分が多く含まれる。

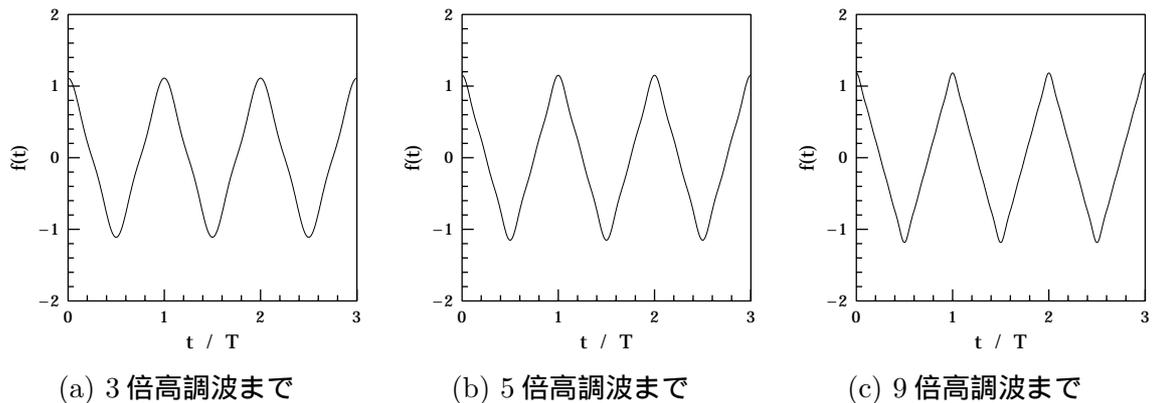


図 C.10 高調波の次数と三角波の再現度の関係

